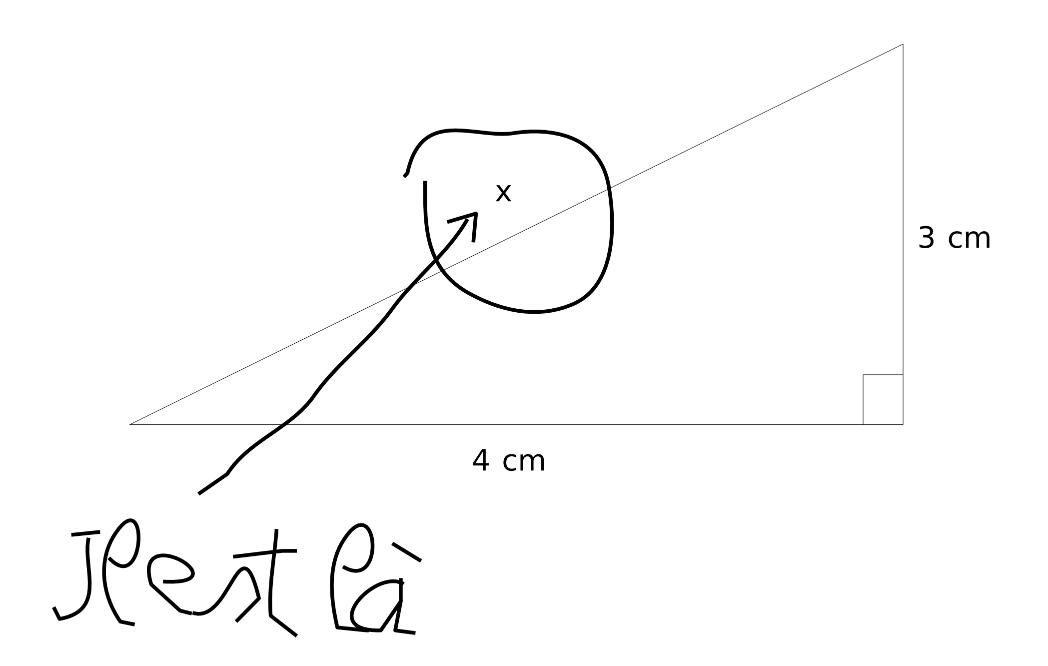
Collège de Saussure

Mathématiques

Première année



Trouver x:



En collaboration avec Sesamath Suisse romande

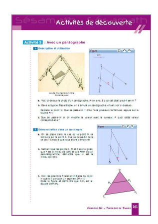


http://sesamath.ch

Chaque chapitre de ce manuel comporte quatre rubriques:

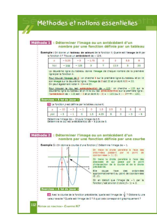
LES PAGES « ACTIVITÉS »

Les activités font découvrir à l'élève de nouvelles notions sur le chapitre en cours en réinvestissant les savoirs des années précédentes.



LES PAGES « MÉTHODES »

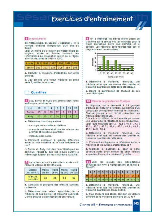
Dans cette rubrique, une synthèse du cours et des méthodes à retenir sont proposées. Des exemples illustrent les savoirs présentés.



LES PAGES « EXERCICES »

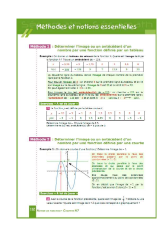
« S'ENTRAÎNER » : Des exercices d'application pour mettre en pratique les méthodes du cours, ainsi que des exercices supplémentaires avec réponses.

« APPROFONDIR » : Des exercices plus complexes et/ou pistes de traverse.



LES PAGES «BILAN»

Dans cette rubrique, on résume de façon succincte les concepts/notions et savoirs-faire attendus de l'élève en fin de chapitre.



Auteurs

Patricia Blanc, Jean-Marie Delley, Catherine Pomezny (Genève)

Cette version a été réalisée grâce au soutien de la direction du collège de Saussure. Certains exercices ont été repris des manuels Sesamath (http://manuel.sesamath.net), d'autres proviennent des cours de nombreux collègues; un grand merci à tous!

Ce document est conçu collaborativement par et pour des enseignants sur le modèle proposé initialement par l'association Sesamath (http://www.sesamath.net) et qui existe désormais également en Suisse romande (http://www.sesamath.ch). Il est publié sous licence libre GFDL et est à ce titre intégralement téléchargeable gratuitement aux formats pdf et odt (généré par OpenOffice3) depuis l'adresse suivante: http://sesamath.ch/manuel-degre12

Vous trouvez aussi à cette adresse toutes les informations relatives à ce projet et à l'association Sesamath. Tous commentaires et contributions bienvenus!

Table des matières

Trois chapitres supplémentaires facultatifs sont disponibles en libre téléchargement à l'adresse http://sesamath.ch/manuel-degre12.

Il s'agit de:

Ch1 Complément « Systèmes de numération » (12p.)

Ch7 Complément « Histoire de l'algèbre » (18p.)

Ch9 Complément « Constructions à la règle et au compas » (3p.)

Notes personnelles

Chapitre 1 - Calcul numérique

Voir aussi le complément «Systèmes de numération»[1]



Problème

On note 3! (on prononce “3 factorielle”) le produit $1 \cdot 2 \cdot 3$, on note 4! le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ et ainsi de suite...

Si on calculait le produit 17! que trouverait-on pour les trois derniers chiffres?

1 En téléchargement libre à l'adresse http://sesamath.ch/manuel-degre12

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Les maths peuvent rapporter gros

La légende rapporte que le jeu d'échecs aurait été inventé par un sage indien, Sessa, fils de Daher, qui voulait rappeler à son souverain trop orgueilleux les principes de justice et d'équité avec lesquels il devait gouverner. Dans ce jeu, en effet, le Roi, quoique la pièce la plus importante, a toujours besoin de toutes ses troupes, même du plus humble de ses fantassins, pour se défendre et vaincre l'ennemi dans une bataille. Le prince aurait été si enchanté d'une leçon donnée de si belle manière, qu'il aurait manifesté le désir de remercier son ingénieux conseiller par un don exceptionnel. Prié de fixer lui-même sa récompense, le sage aurait alors demandé 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 grains pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant toujours le nombre de grains jusqu'à la soixante-quatrième et dernière case. Selon la légende encore, le prince ordonna de satisfaire immédiatement à une demande si modeste.

Et vous, auriez-vous demandé plus ?

Indication: on pourra utiliser l'estimation $2^{10}=1024\simeq 10^3$

Activité 2 Puissance(s)

1. Selon les Indiens, le nombre de fils de Bouddha est dix mille milliards de milliards de milliards de milliards. Écrire ce nombre comme une puissance de 10.

2. Quel est le nombre le plus grand: 2^{400} ou 10^{100} ?

a. Essayer avec la calculatrice. Que déduire?

b. Trouver une autre piste...

Activité 3 Rêver?

Dire d'un nombre qu'il est grand n'a guère de sens. Dans la vie primitive les objets usuels ou les événements familiers se comptaient sur les doigts des mains. De nos jours, les multiples opérations de codage de notre vie courante, du numéro minéralogique au numéro de téléphone, utilisent des nombres de six chiffres ou plus. Estimer les distances entre les astres du ciel ou le nombre de particules dans l'Univers conduit à des nombres encore plus grands. Vénus, la déesse de l'Amour, a servi de marraine à la planète qui est, hormis la Lune, le corps céleste le plus proche de la Terre. Après le Soleil et la Lune, c'est l'astre le plus brillant de notre firmament. Aussi la voit-on souvent de jour, avant même le coucher du Soleil ou, tôt le matin, lorsqu'on part travailler. Son nom populaire est l'Étoile du Berger. Sa distance au Soleil est d'environ 100 millions de kilomètres.

Alpha Centauri est l'étoile la plus proche de la Terre, hormis le Soleil. 4,3 années-lumière nous séparent d'elle, soit environ 40 000 milliards de kilomètres.

Avec de tels nombres se pose la question de la notation et de l'ordre de grandeur. Cette idée est amorcée dans l'Arénaire d'Archimède (287 - 212 av. J.-C.). Les œuvres mathématiques d'Archimède forment un ensemble imposant, malgré les altérations et les pertes subies au cours des siècles. L'ouvrage intitulé l'Arénaire est rédigé sous la forme d'une longue lettre dans laquelle Archimède détrompe le roi Gélon de l'idée que l'on ne pourrait écrire un nombre assez grand pour représenter la quantité prodigieuse de grains de sable que contiendrait une sphère aussi grande que la sphère étoilée, et il démontre que ce nombre ne dépasserait pas en définitive le nombre qui, dans notre système de numération, serait représenté par 1 suivi de soixante-trois zéros. L'Arénaire se termine ainsi: « ... je conçois, roi Gélon, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la Terre, du Soleil et du Monde entier les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.»

Prérequis et activités de découverte

Des nombres encore plus considérables apparaissent dans l'astrophysique actuelle. Certains astrophysiciens ont calculé que dans 10^{12} années toutes les étoiles seront éteintes, que dans 10^{1500} années toute la matière se métamorphosera en boules de fer et que dans $10^{10^{76}}$ années, lors d'un gigantesque feu d'artifice, toute la matière de l'Univers s'évaporera en lumière.

Les mathématiciens, de leur côté, font encore mieux. Dans des problèmes de dénombrement de la théorie des graphes, ils en arrivent à considérer, par exemple, le nombre de Folkman: $10^{10^{10^{10^{10}}}}$
Et cependant, rien n'empêche notre imagination de concevoir des nombres plus grands encore et de se faire ainsi une première idée de l'infini ...

Source: « Algèbre Mode d'emploi », G. Charrière, Ed.LEP

1. Combien de temps faudrait-il pour aller sur Alpha Centauri si on se déplaçait à 100000km/h?

2. Quel est le nom de $10^{10^{10}}$?

3. Quel est le plus grand nombre que vous sachiez nommer?

4. Facultatif: faire une recherche pour comprendre comment on peut compter – efficacement! - sur les doigts de la main.

Activité 4 Ordre des opérations et parenthèses

1. Calculer $3-(2-(7-11)+(4-3-(10+2-(-5+2))-1)-7)$

2. Placer les parenthèses qui permettent de trouver le résultat indiqué:

a. $35+5:5-3+2\cdot4=16$

b. $35+5:5-3+2\cdot4=41$

c. $35+5:5-3+2\cdot4=28$

d. $35+5:5-3+2\cdot4=4$

Activité 5 Voir double?

Sur votre calculatrice, il y a deux symboles « - ». Pourquoi?

Activité 6 Vocabulaire

Compléter:

1. 3,4,5,6 sont des entiers ....

2. -67, 0 et 2 sont des entiers ....

3. l'opposé de -18 est ....

4. la .... de 5 et 8 est égale à 13

5. la .... de 4 et 9 est égale à-5

6. le .... de 8 et 6 est égale à 48

Activité 7 Littérature

Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie. L'hypocrisie à mes yeux, c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs prêtres. Suivant moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques, et, dans ma simplicité juvénile, je

pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que « moins par moins donne plus »? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle « algèbre »). On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa « leçon », celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire: « Mais c'est l'usage; tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit, vous voulez apparemment vous singulariser. » Quand a M. Dupuy, il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de « moins par moins » à un « fort », il me riait au nez; tous étaient comme Paul-Emile Teisseire et apprenaient par coeur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations: « Il est donc évident, etc » Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur. –. ×. – = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M.Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les « forts » auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui: il faut bien que - par - donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats « vrais et indubitables »

Stendhal, « La vie d'Henry Brulard »

De 14 à 17 ans, Henri Beyle, dit Stendhal, étudia à l'Ecole centrale de Grenoble, une des premières institutions où l'enseignement des mathématiques dispensé à de jeunes élèves était influencé par les cours de l'Ecole Normale issue de la Révolution française. Dans « La vie d'Henry Brulard » (1835), ouvrage autobiographique, reflet d'une passion pour le dessin et les mathématiques et d'une adolescence où sa révolte contre son père et contre la société le conduit à se déclarer athée et jacobin, on constate que l'enseignement reçu ne parvint pas à satisfaire la curiosité du jeune Stendhal lorsqu'il voulut comprendre l'origine de la « règle des signes ».Messieurs Chabert et Dupuy n'auraient-ils donc pas suivi les recommandations du marquis de Condorcet, auteur d'un projet de réforme de l'instruction publique (1792) ? Convaincu du développement indéfini des sciences, Condorcet y affirme que le progrès intellectuel et moral de l'humanité peut être assuré grâce à une éducation bien orientée et il écrit, peu avant sa mort tragique: « il m'a paru qu'en général on ne devrait rien enseigner aux enfants, sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs ». Si l'on peut apprécier l'éreintage de ses maîtres réussi par Stendhal, il faut savoir reconnaître à ceux-ci quelques circonstances atténuantes, puisées dans une histoire bimillénaire, celle des nombres négatifs.

La première apparition de nombres négatifs remonterait aux débuts de la dynastie Han, deux siècles environ avant notre ère. Un des plus anciens textes mathématiques chinois connus, le Jiuzhang suanshu (L'art du calcul en neuf chapitres) distingue nombres positifs et négatifs par des bâtonnets de bambou ou d'ivoire, peints en rouge ou en noir, bâtonnets que les administrateurs des régions de l'empire transportaient dans leurs sacs comme instruments de calcul. L'ouvrage en question donne d'ailleurs, plus ou moins explicitement, les règles des signes pour les deux opérations fondamentales que sont l'addition et la multiplication. Mais pour les chinois les nombres étaient toujours issus de situations concrètes: un nombre représentant toujours une certaine quantité de quelque chose. Les nombres négatifs ne se rencontraient donc que comme auxiliaires de calcul et n'étaient pas considérés comme des solutions possibles à un problème donné.

[Comme nous le verrons plus loin], dans les mathématiques grecques, les nombres restèrent toujours liés à une interprétation géométrique. De ce fait, des nombres négatifs ne furent pratiquement jamais envisagés, contrairement aux nombres irrationnels.

Les nombres négatifs réapparaissent bien plus tard en Inde. Dès le huitième siècle, les Hindous montrent une parfaite connaissance de ces nombres et de leur manipulation, essentiellement dans des problèmes commerciaux. Mais la justification d'une règle telle que « le négatif multiplié par le négatif est positif » reste absente.

En Occident, les nombres négatifs apparaissent relativement tard et il faudra attendre plusieurs siècles avant que les mathématiciens ne les acceptent en tant que nombres réels. Michael Stifel (1487- 1567) connaissait parfaitement leurs propriétés et les introduisit en 1544 dans son Aritmetica Integra, mais il les appelait « numeri absurdi ». Jérome Cardan (1501 - 1576) les acceptait comme solutions de certains problèmes, mais il les qualifiait de nombres fictifs. Albert Girard (1595- 1632) fut le premier à en donner une interprétation géométrique: le signe - s'explique en géométrie en rétrogradant et les solutions par - reculent là ou les solutions par + avancent. Blaise Pascal (1623- 1662) considérait pour sa part, la soustraction de quatre à zéro

comme un pur non-sens: "j'en sais qui ne peuvent comprendre qui de zéro ôté quatre, reste zéro".

Au milieu du dix-huitième siècle, les explications données dans l'Encyclopédie au sujet des nombres négatifs et de leur utilisation restent encore assez peu claires et l'on y explique que, si un nombre négatif se trouve être la solution d'un problème, c'est que ce problème est mal posé. Ainsi, des siècles durant, certains utilisèrent les nombres négatifs dans leurs calculs, souvent avec subtilité et adresse, tentant d'élaborer tant bien que mal des justifications concrètes, tandis que d'autres continuèrent à protester contre leur usage.

Dès le dix-neuvième siècle, les nombres négatifs conquirent enfin un statut comparable à celui des nombres positifs. Mais la justification d'une règle, telle que la règle des signes chère à Stendhal, ne sera donnée qu'en 1867 par Hermann Hankel (1814- 1899), de façon formelle et définitive.

Source: « Algèbre Mode d'emploi », G. Charrière, Ed.LEP

1. Qui était Stendhal? Quand et où a-t-il vécu? Quelles sont ses oeuvres les plus connues?

2. Comment s'appelle l'école où a étudié Stendhal? De quoi s'agissait-il?

3. Que signifie « jacobin »?

4. Quel fut le destin tragique de Condorcet?

5. Qu'est-ce que « L'Encyclopédie »?

6. Reporter sur une frise chronologique les dates, personnages et lieux évoqués ci-dessus.

7. Et vous, que dites-vous de la « règle des signes »?

Activité 8 Brahmagupta

Une dette moins zéro est une dette.

Un bien moins zéro est un bien.

Zéro (*shûnya*) moins zéro est nul (*kham*).

Une dette retranchée de zéro est un bien.

Alors qu'un bien retranché de zéro est une dette.

Le produit de zéro par une dette ou par un bien est zéro.

Le produit de zéro par lui-même est nul.

Le produit ou le quotient de deux biens est un bien.

Le produit ou le quotient de deux dettes est un bien.

Le produit ou le quotient d'une dette par un bien est une dette.

Le produit ou le quotient d'un bien par une dette est une dette.

Source: Brahmagupta, Brâhmasphutasiddhânta

cité par Ifrah G., Histoire universelle des chiffres, T. 1, p. 976

1. Qui était Brahmagupta? Quand et où a-t-il vécu?

2. Facultatif: faire une recherche autour de l'histoire du zéro.

A savoir 1 Des entiers...

Définitions

- ☐ $0;1;2;3;4;5;6;7;8$ et 9 sont les **chiffres**, avec lesquels on construit les **nombres**.
- ☐ $0;1;2;3;...$sont des **entiers naturels**.
- ☐ $...;-2;-1;0;1;2;...$ sont des **entiers relatifs**.
- ☐ La **somme** de deux entiers est le résultat de leur addition.
- ☐ Le **produit** de deux entiers est le résultat de leur multiplication.
- ☐ La **différence** de deux entiers est le résultat de leur soustraction.
- ☐ L'**opposé** d'un entier est le même entier auquel on a changé son signe.

Ordre des opérations et parenthèses

Pour calculer une expression arithmétique, on décide d'effectuer les différentes opérations en suivant l'ordre indiqué par les règles ci-dessous :

- ☐ les opérations à l'intérieur d'une paire de parenthèses qui ne contient pas de parenthèse
- ☐ les puissances (et les racines)
- ☐ les multiplications (et les divisions), de gauche à droite
- ☐ les additions et les soustractions, de gauche à droite

Le rôle principal des parenthèses dans l'écriture mathématique est de séparer les opérations les unes des autres. Si on n'avait pas de convention sur l'ordre des opérations, il faudrait mettre entre parenthèses chaque expression contenant une opération et les deux nombres s'y rapportant.

Remarque: Si, dans une écriture sans parenthèse, il ne reste que des additions et des soustractions, il faut effectuer ces opérations de gauche à droite.

Exemple: calculer $7-2\cdot 3+6$

En effectuant la première multiplication, on obtient 7 - 6 + 6, puis, de gauche à droite, 7

Exemple: calculer $-14-(2-4-(6-3)+(4-3-(1+2-(-6+2)-1)-7)+3)$

$-14-(2-4-(6-3)+(4-3-(1+2-(-6+2)-1)-7)+3)$
$=-14-(2-4-(3)+(4-3-(1+2-(-4)-1)-7)+3)$
$=-14-(2-4-3+(4-3-(1+2+4-1)-7)+3)$
$=-14-(2-4-3+(4-3-(6)-7)+3)$
$=-14-(2-4-3+(4-3-6-7)+3)$
$=-14-(2-4-3+(-12)+3)$
$=-14-(2-4-3-12+3)$
$=-14-(-14)$
$=-14+14$
$=0$

On traite les parenthèses les plus imbriquées en premier ...

A savoir 2 Règle des signes

- plus fois plus égale plus
- plus fois moins égale moins
- moins fois plus égale moins
- moins fois moins égale plus

A savoir 3 Puissances

Rappels

- Dans 10^5 , 10 est la **base** et 5 **l'exposant**.
- $10^5 \cdot 10^7 = 10^{12}$: lorsqu'on multiplie deux puissances qui ont la même base, on additionne les exposants.
- $(10^5)^7$: lorsqu'on calcule une puissance de puissance, on multiplie les exposants.

Remarque: ces propriétés des puissances seront retravaillées spécifiquement plus tard.

Définition

La **pyramide de puissances** $10^{10^{10}}$ s'interprète comme $10^{(10^{10})}$

A savoir 4 Comparer des grands nombres

Pour comparer deux grands nombres, on essaye de les transformer pour qu'ils aient soit la même base, soit le même exposant.

Exemple: comparer 3^{200} et 25^{100}

$25^{100} = (5^2)^{100} = 5^{(2 \cdot 100)} = 5^{200}$ donc $25^{100} > 3^{200}$

A savoir 5 Estimer un grand nombre

Pour estimer un très grand nombre que la calculatrice ne permet pas de manipuler (error!), on peut essayer de le comparer à une puissance de 10. On peut par exemple utiliser le fait que $2^{10} = 1024 \simeq 1000 = 10^3$

Exemple: estimer 2^{2010}

$2^{2010} = 2^{(10 \cdot 201)} = (2^{10})^{201} \simeq (10^3)^{201} = 10^{603}$

Puissances de 10

1 Écrire chacun des nombres suivants comme une puissance de 10:

a. 100000

b. un milliard

c. 1

2 « Mille milliards de mille sabords ! » disait le capitaine Haddock.
Écrire ce nombre comme une puissance de 10.

3 Combien de temps – arrondi à l'heure - faudrait-il pour écrire tous les nombres de 1 à un million en admettant qu'on écrit trois chiffres par seconde en moyenne ?

4 Combien faudrait-il de chiffres pour écrire sous forme décimale $10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$?

Parenthèses

5 Placer les parenthèses aux bons endroits, pour que les égalités suivantes soient vraies :

a. 1 - 2 + 3 - 4 = 0

b. -24 -27 - 30 - 33 = 0

c. $2\cdot 3-4\cdot 2-5-3=-6$

6 Calculer

$-3-(9-(4-(-11+(1+8-(-25+23)))-1)-7)$

Comparer

7 Quel est le plus grand nombre, 27^{2000} ou 343^{1200} ?

Dernier chiffre

8 Par quel chiffre se terminent les nombres suivants?

a. 2^{100}

b. 11^{101}

c. $17\cdot 2^{53}$

Calculatrice

9 Quel est le plus grand nombre entier que votre calculatrice peut manipuler?

Étymologies

10 Rechercher les étymologies des mots « chiffre », « nombre », « entier », « entier naturel » et « entier relatif ».

HANC MARGINIS EXIGUITAS NON CAPERET

Pierre Simon de Fermat (1601-1665)

11 *Triplets pythagoriciens*

a. Existe-t-il des triangles rectangles dont toutes les mesures de tous les côtés sont des entiers ?

b. Étant donnés deux côtés quelconques, est-il toujours possible de construire un triangle rectangle en ajoutant un troisième côté ?

c. Étant donnés deux côtés quelconques dont les mesures sont des entiers, est-il toujours possible de construire un triangle rectangle en ajoutant un troisième côté qui soit aussi de mesure entière ?

d. Un **triplet pythagoricien** est un triplet de nombres entiers dont la somme des carrés des deux premiers est égale au carré du troisième. Donner plusieurs exemples de triplets pythagoriciens.

e. Existe-t-il une infinité de triplets pythagoriciens ? Justifier.

12 Pour un sondage, on utilise un questionnaire à choix multiple (QCM). A chaque question, on peut répondre par « oui », par « non » ou « sans opinion ».

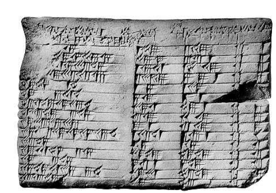
a. Si on a 10 questions, de combien de manières différentes peut-on répondre à ce questionnaire ?

b. Et si on a 20 questions ?

13 Un automate effectue deux fonctions : il élève un nombre donné au cube et il divise un nombre donné par 8. En commençant par le nombre 2, peut-on obtenir à l'aide de cet automate les nombres 64 ? 2^{2009} ?

HANC MARGINIS EXIGUITAS NON CAPERET (suite)

L'histoire de la recherche de triplets pythagoriciens se confond en quelque sorte avec l'histoire des mathématiques. Une tablette babylonienne datée entre 1900 et 1600 avant notre ère, la tablette 322 de la collection Plimpton de l'Université Columbia, New-York, contient une liste de 15 triplets qui sont les exemples les plus anciens connus.



Source:http://www.espritcartesien.com/mathematiques/theoremefermat/img/plimpton322c.jpg

a. Interpréter les nombres de la table ci-dessus sachant que les Babyloniens utilisaient une base 60:

Angle	Petit côté (a)	Hypoténuse (c)	Ligne
[1 59 *] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 6 15	56 7	3 12 1	2
[1 55 7] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1 53] 10 [*] 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 1 40	1 5	1 37	5
[1] 47 6 41 40	5 19	8 1	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	7
[1] 41 33 59 3 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 1	12 49	9
[1] 35 10 2 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [*] 3 45	7 12 1	4 49	13
[1] 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	15

b. Que penser de la dénomination "triplets pythagoriciens" ?

Il semble bien qu'à cette époque déjà, les mathématiciens connaissaient une méthode permettant d'engendrer les triplets pythagoriciens et qu'ils les utilisaient comme aide à la trigonométrie. Histoire à suivre ...

Si Pythagore, Platon ou Euclide, parmi d'autres mathématiciens grecs, donnent plusieurs siècles avant JC plusieurs règles pour les former, c'est avec Diophante d'Alexandrie (vers 250 ap. J.-C.) que leur étude prend un nouvel essor. Dans le 2ème livre de son œuvre maîtresse, l'Arithmetica, il pose et résout de façon originale le problème suivant : diviser un carré en deux autres carrés.

Algébriquement parlant, on l'aura deviné, ce problème demande de trouver trois nombres entiers a, b, c, tels que $a^2+b^2=c^2$ ce qui en soi n'est pas nouveau.

Mais, 14 siècles plus tard, entre en scène Pierre Simon de Fermat (1601-1665). Fermat n'est pas mathématicien de profession. Juriste et conseiller au Parlement de Toulouse, il consacre ses loisirs aux mathématiques. Ce qui ne l'empêche pas de faire d'importantes découvertes, qu'il publie d'ailleurs rarement. Selon l'usage de l'époque, il en donne souvent communication dans des lettres à ses amis. A sa mort, en 1665, il est un des mathématiciens les plus connus d'Europe.

Lorsque son fils se met en devoir de rassembler toutes les notes et les lettres de son père, il tombe sur un exemplaire de l'Arithmetica de Diophante, une traduction en latin datant de 1621, annoté de la main de son père.

En marge du problème qui nous intéresse, on peut lire : « Décomposer un cube en deux autres cubes, une quatrième puissance, et généralement une puissance de même nom au-dessus de la seconde puissance, est une chose impossible, et j'en ai assurément trouvé l'admirable démonstration. La marge serait trop exigüe et ne la contiendrait pas. »

Ce qu'affirme Fermat, c'est que si n est un nombre entier supérieur à 2, il n'est pas possible de trouver trois entiers (non nuls) a, b, c, tels que $a^n+b^n=c^n$.

Comme on n'a retrouvé aucune trace de sa démonstration, cela est resté une conjecture.

Cette conjecture de Fermat est certainement la plus fameuse de l'histoire de l'Arithmétique; ceci pour deux raisons fort différentes.

D'une part, c'est celle pour laquelle le plus grand nombre de preuves incorrectes a été publié. D'autre part, les travaux qu'elle a suscités ont conduit au développement de domaines entièrement nouveaux des mathématiques. Les plus grands mathématiciens y ont contribué et des livres par centaines y sont consacrés. Cependant cette conjecture, bien que vérifiée dans de très nombreux cas (pour tous les exposants inférieurs à 150000, par exemple), est restée un problème ouvert pendant plus de trois cent cinquante ans !

Enfin, en juin 1993, le mathématicien Andrew Wiles, professeur à l'Université de Princeton et spécialiste de la théorie des nombres, annonce que la conjecture de Fermat est démontrée. Six mois plus tard, il faut déchanter. La démonstration ne résiste pas aux vérifications de détail faites par quelques experts ; elle présente une lacune fâcheuse.

Finalement, en octobre 1994, la communauté mathématique apprend qu'Andrew Wiles a triomphé des difficultés: la conjecture de Fermat est devenue un théorème!

Une référence pour aller plus loin :
Le Dernier Théorème de Fermat (1999), de *Simon Singh, Poche.*

Bilan

Il y a quelques années, après une conférence, quelqu'un me dit:
"Vous semblez toujours lier mathématiques et amusement...".
Je fus inspiré de lui répondre: "Si ce n'était pas amusant, pourquoi en ferions-nous?"

Ralph P. BOAS

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ Les nombres entiers naturels et relatifs.
- ✔ Opposé d'un entier.
- ✔ La différence entre chiffre et nombre.
- ✔ Nommer, manipuler et représenter des grands nombres – limitations.
- ✔ Ordre des opérations.
- ✔ Gestion des parenthèses.
- ✔ Le vocabulaire lié aux opérations, différencier une opération de son résultat.
- ✔ Le nom des grands nombres.
- ✔ La calculatrice ne permet pas de représenter tous les entiers naturels.
- ✔ Avoir conscience du temps historique qui a été nécessaire pour mettre en place de tels concepts, outils, notations,...

Savoirs-faire

- ✔ Identifier des nombres entiers naturels et relatifs.
- ✔ Déterminer l'opposé d'un entier.
- ✔ Différencier addition/somme, soustraction/différence, multiplication/produit
- ✔ Gérer des calculs complexes (parenthèses imbriquées et ordre des opérations).
- ✔ Manipuler des puissances de 10.
- ✔ Nommer, manipuler et comparer des grands nombres.
- ✔ Estimer une puissance de 2 en une puissance de 10 ($2^3 \approx 10^3$).
- ✔ Interpréter une pyramide de puissances.
- ✔ Utiliser la calculatrice pour des calculs élémentaires.
- ✔ Lire, comprendre, se représenter et résoudre des problèmes.

Chapitre 2 - Des nombres aux lettres

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problêmes & les Queſtions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curioſité, tant des Mathématiques que de la Phyſique ; le tout traité d'une maniere à la portée des Lecteurs qui ont ſeulement quelques connoiſſances légeres de ces Sciences.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale des Sciences, &c.

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & conſidérablement augmentée par M. de C. G. F.

TOME PREMIER,

Contenant L'ARITHMÉTIQUE & la GÉOMÉTRIE.



A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Ouvrage de Jacques Ozanam, publication postume en 1778

Problème

Dans la prison de Sikinia, il y a 200 cellules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; ..... ; 200. Ces cellules sont toutes occupées et sont naturellement fermées à clef. Lorsqu'on tourne la clef d'un demi tour dans la serrure, la porte s'ouvre, mais si on tourne encore la clef d'un demi tour, la porte est à nouveau fermée (et ainsi de suite).
Pour fêter le vingtième anniversaire de la république de Sinikia, le président décide une amnistie et il donne l'ordre suivant au directeur de la prison :
Vous partez de la cellule n°1 et vous tournez d'un demi tour toutes les serrures.
Vous partez de la cellule n°2 et vous tournez d'un demi tour toutes les deux serrures. (une sur 2)
Vous partez de la cellule n°3 et vous tournez d'un demi tour toutes les trois serrures. (une sur 3)
Et ainsi de suite..........
Finalement, vous partez de la cellule n°200 et vous tournez d'un demi tour toutes les 200 serrures (une sur 200).Un prisonnier sera libéré si, à la fin, sa porte est ouverte.
Question : Quels seront les prisonniers qui seront libérés ?

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Traduire d'une expression littérale

Bien avant les émissions télévisées de vulgarisation scientifique, d'authentiques savants ont eu la volonté de rapprocher de leur science, en douceur, un public non spécialisé. Dans le domaine des mathématiques, on voit apparaître au XVII siècle déjà des ouvrages en français qui proposent des problèmes et des énigmes«pour instruire aussi bien que pour divertir». Leur succès est immédiat. De très nombreux amateurs éclairés font leurs délices de problèmes arithmétiques ou géométriques nécessitant quelques raisonnements astucieux : cela devient un divertissement à la mode ! Parmi les auteurs recherchés, on trouve Jacques Ozanam (1640-1717), mathématicien dont la réputation lui valut d'être membre de l'Académie Royale des Sciences. Ses Récréations Mathématiques et Physiques (1694) constituent un réservoir immense, où des générations d'auteurs de ce genre d'ouvrages ont largement puisé. Ozanam propose, par exemple, des méthodes «pour deviner un nombre que quelqu'un aura pensé» ou pour en découvrir d'autres possédant des propriétés particulières. En voici quelques exemples classiques.

a. «Si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, et qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se termine par 3»

b. «Si on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, et qu'on ajoute le même nombre au triple du reste, on aura une somme qui se termine par 7»

c. «Pour trouver deux nombres dont les carrés fassent ensemble un nombre carré,multipliez deux nombres quelconques ; le double de leur produit sera l'un des deux nombres qu'on cherche, et la différence de leurs carrés sera l'autre nombre ».

Au début de son ouvrage, l'auteur nous a prévenus : "Comme je ne prétends pas proposer des problèmes difficiles, je ne prétends pas aussi en donner les démonstrations pour ne pas embarrasser le Lecteur que je veux divertir". Il se contente donc de justifier chacune de ses nombreuses propositions par un ou deux exemples numériques...

Reprendre les problèmes de Jacques Ozanam et, contrairement à lui, utiliser des lettres pour poser ses problèmes et les interpréter.

Activité 2 Traduire en expression littérale

On s'intéresse aux **identités remarquables carrées**:

a. Les énoncer entièrement en langue française.

b. Les énoncer à l'aide du calcul littéral.

Activité 3 Manipuler des expressions littérales

Réduire les expressions suivantes :

a. $7x^2-3x^2+4x^2-x^2$

b. $(-4ab)-(-2ab)+(-5ab)$

c. $-\left(-\frac{1}{2}x\right)+\left(+\frac{1}{3}x\right)-(-2x)$

d. $a\cdot a\cdot b-2a^{2b}-(-5a\cdot ab)$

e. $x^2-(y^2-z^2)+y^2-(x^2+z^2)-z^2-(x^2-y^2)$

f. $-x-(6x+(y-(x+y)-3z)-(2z+5x)+3y)$

Activité 4 Des lettres

1. A l'origine

Au cours des siècles, l'homme a cherché à être plus efficace lorsqu'il s'agissait de résoudre des problèmes, qu'ils soient d'ordre économique, commercial, technique, etc. Ce développement s'est accompagné du passage d'un niveau concret à différents niveaux d'abstraction:

•il y a d'abord eu l'idée d'**énumérer** des objets;

•ceci conduit au concept de nombre, puis au besoin de **représenter** ces nombres. On écrit donc un symbole (ou un ensemble de symboles) qui représente une certaine quantité;

•le niveau d'abstraction suivant consiste à remplacer les nombres par des **lettres**...

2. Comment procéder ?

Il s'agit de ne pas confondre les lettres qui représentent des nombres de celles que nous destinons à du texte; on choisit souvent par convention d'écriture d'écrire les lettres qui représentent des nombres sous forme italisée; par exemple, à la place de a, on écrit a ; pour b, on écrit b, etc.

La difficulté s'accroît lorsqu'on écrit à la main, où on ne distingue alors plus de différence de calligraphie. Il est donc indispensable que le **contexte** soit suffisamment clair pour qu'il n'y ait aucune confusion.

3. Les faux-amis

Le risque consiste à passer trop vite sur ce passage des nombres aux lettres; il n'est en effet pas si anodin, comporte son lot de surprises et de difficultés qui peuvent être source de **problèmes de compréhension** qui poursuivront l'étudiant en mathématique tout au long de ses apprentissages.

Prenons par exemple une des conventions qui a été utilisée dans le cadre de la notation des nombres, la juxtaposition des symboles; considérons le nombre vingt-trois, qui s'écrit en base dix comme 23, ce que la convention habituelle permet d'interpréter comme étant égal à $2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

Imaginons qu'on utilise la lettre e pour représenter un nombre entre 0 et 9, et la lettre t pour représenter un autre nombre entre 0 et 9. Qu'en est-il de et ? Qu'est-ce que cela représente ?

On se rend vite compte que dans le contexte de lettres représentant des nombres, les conventions utilisées sont toutes autres. Le juxtaposition des symboles ici signifie $e \cdot t$ et correspond à une multiplication. On remarque dès lors des confusions dangereuses :

$$et = te \quad \text{alors que} \quad 23 \neq 32$$

Changeons encore de contexte : dans le cadre de la langue française, " et " et " te " forment deux mots ayant chacun leur propre signification. On pourrait alors écrire et ≠ te !

4. Pas un signe

a. Est-il possible que et soit un nombre négatif ?

b. Est-il possible que tt soit un nombre négatif ?

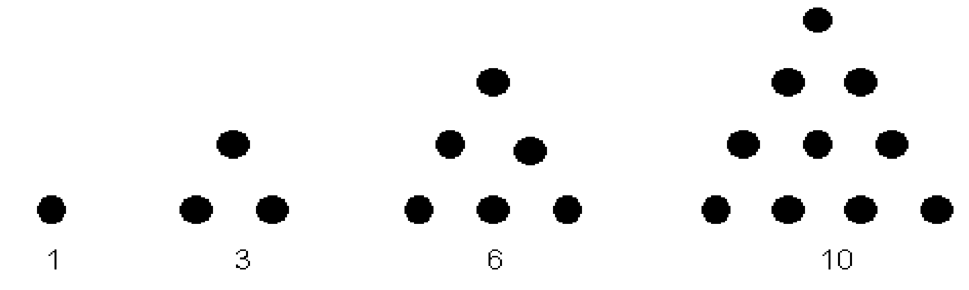
c. Est-il possible que ee soit, après avoir effectué l'opération, le nombre 5 ?

Les réponses à ces questions dépendent souvent de **conventions implicites**. L'économie de moyens est une force du langage mathématique qui ne s'acquiert que par une utilisation régulière. En contrepartie, cette économie exige une attention toute particulière.

Activité 5 Des nombres aux lettres

1. Nombres triangulaires

Voici les quatre premiers **nombres triangulaires** :



a. Calculer le 1000e nombre triangulaire.

b. Trouver une formule permettant de tous les calculer.

c. Facultatif: faire une recherche pour identifier d'autres nombres « géométriques »

2. Nombre de droites

Déterminer le nombre maximal de régions que l'on délimite sur un plan en y traçant:

a. deux droites

b. trois droites

c. quatre droites

d. 10 droites

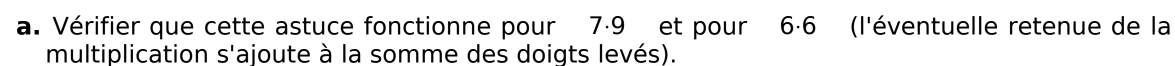
e. 100 droites

Activité 6 Aller plus loin

Calculatrice digitale

Pour calculer $6 \cdot 8$, Jérôme a vu son professeur de mathématiques opérer de la façon suivante:

- Pour faire 6, avec la main droite, je lève 1 doigt.
- Pour faire 8, avec la main gauche, je lève 3 doigts.
- J'additionne les doigts levés des deux mains : 1 + 3 = 4.
- Je multiplie le nombre de doigts baissés à droite par le nombre de doigts baissés à gauche : 4 × 2 = 8.
- Le résultat est 48.


a. Vérifier que cette astuce fonctionne pour $7 \cdot 9$ et pour $6 \cdot 6$ (l'éventuelle retenue de la multiplication s'ajoute à la somme des doigts levés).

b. Quels sont les calculs que l'on peut réaliser ainsi?

c. Démontrer cette méthode de calcul de $a \cdot b$ avec les doigts pour a et b compris entre 5 et 9.

Méthodes et notions essentielles

A savoir 1 Des nombres aux lettres

Définitions

☐ Une **variable** (numérique) est une lettre ou un symbole qui représente n'importe quel nombre. En général, on précise de quel type de nombre il s'agit – par exemple les entiers naturels; si ce n'est pas le cas, c'est le **contexte** qui l'indique implicitement.

☐ Une **constante** (numérique) est une lettre ou un symbole qui représente un nombre fixé.

☐ Une **expression** (algébrique) est le résultat obtenu en faisant subir à au moins une variable et éventuellement à des constantes et/ou nombres des additions, multiplications, soustractions et divisions, en les élevant à des puissances ou en extrayant des racines.

Exemples

- π est une constante, appelée « pi », toujours égale à 3,14159265... ; elle est définie comme le rapport constant entre le périmètre et le diamètre d'un cercle.
- $2xy+5y$, $\sqrt{2x^7}$ et $\dfrac{25y+\sqrt{5}x}{x-18}$ sont des expressions; $2xy+5y=2$ n'est pas une expression

Remarques

- Une lettre peut aussi bien représenter un nombre positif qu'un nombre négatif.
- Les occurrences différentes de la même lettre représentent toujours le même nombre ou la même expression.

A savoir 2 Pair, impair et multiple

Définitions

☐ Un entier relatif n est **pair** s'il peut s'écrire sous la forme $n=2k$ où k est un entier relatif; il est **impair** s'il peut s'écrire sous la forme $n=2k+1$ où k est un entier relatif.

☐ Soit n un entier relatif. m est un **multiple** de n s'il peut s'écrire sous la forme $m=k\cdot n$ où k est un entier relatif.

A savoir 3 Somme des n premiers entiers

Théorème

Soit n un entier naturel non nul. Alors on a: $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

A savoir 4 Traduction français/mathématique

Exemple: traduire en expression littérale « le tiers de la différence de x et de l'unité »

$\frac{1}{3}\cdot(x-1)$

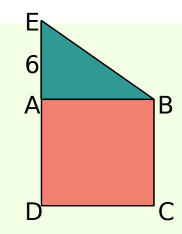
Exemple: traduire en français « $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ »

La différence des carrés de a et b est égale au produit de leur somme et de leur différence

A savoir 5 Traduire une situation en expression algébrique

Exemple

Sur le schéma, $ABCD$ est un carré et ΔABE est un triangle rectangle en A tel que $\overline{AE}=6\,cm$. Tous les points sont distincts. Exprimer l'aire du carré $ABCD$ ainsi que celle du triangle ΔABE par rapport à la longueur du côté du carré $ABCD$.



Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure en cm du côté du carré $ABCD$. Comme les points sont distincts alors $x>0$. Donc $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=x$.	On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note x.

Étape n°2 : Utiliser l'inconnue pour exprimer les grandeurs demandées

$A_{ABCD}=AB\cdot AD$ $A_{ABCD}=x\cdot x=x^2$ $A_{ABE}=\frac{AB\cdot AE}{2}$ $A_{ABE}=\frac{x\cdot 6}{2}=3x$	On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x.

Exercices d'entraînement

1 Traduire en expression littérale les données suivantes:

a. Un nombre qui se termine par 19

b. Un multiple de 33

c. Un nombre impair

d. Un nombre carré pair

e. Un nombre, somme de trois nombres pairs consécutifs

f. Trois multiples de 17 consécutifs

g. Le carré de la somme du produit de 2 par x et de 3

h. La différence des carrés de la différence du double de x et de 5 et de la somme de x et de 3

i. Le quadruple de la somme du centuple de l'unité et d'un nombre pair

2 La grande base d'un trapèze est le double de sa petite base. Sa hauteur a la même mesure que sa petite base. Déterminer l'expression algébrique réduite de son aire.

3 L'aire d'un rectangle est de $4a^2 + 8a$. Trouver sa longueur, si la largeur mesure 2a.

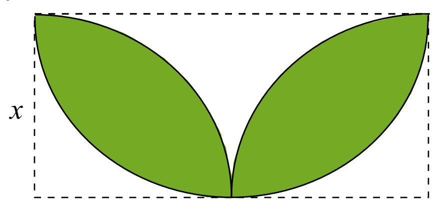
4 L'aire d'un carré correspond à l'expression $c^2 - 14c + 49$. Déterminer l'expression algébrique réduite pour le périmètre de ce carré.

5 Un rectangle a une largeur de x cm et un longueur de (x + 6) cm. On lui enlève un carré de 3cm de côté. Quelle est l'expression algébrique réduite qui représente l'aire de la figure restante ?

6 Une couronne est une figure géométrique formée par la surface comprise entre deux disques concentriques, l'un de rayon R et l'autre de rayon r. Exprimer l'aire d'une telle couronne.

7 Aire

Exprimer l'aire coloriée en fonction de x.



Quelles sont les **hypothèses implicites** de cet exercice ?

8 Rechercher les étymologies des mots « algèbre », « variable », et « constante ».

9 Réduire les expressions suivantes :

a. $(3x^2-7x+2)-(-4x^2+5x-3)$

b. $-(-3x^3+2-(7x^3+4-(10-x^3)+3x^3)+15)$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

10 *Traduction*

Traduire en expression littérale les données suivantes:

a. La différence de la somme et du produit de deux nombres

b. 3 multiples de 4 consécutifs

c. Un nombre, différence des carrés de deux nombres consécutifs

d. Un nombre, somme de trois nombres impairs consécutifs

e. Un nombre qui laisse un reste de 4 lorsqu'on le divise par 5.

11 *Arithmétique*

a. Quelle expression algébrique réduite représente la moyenne arithmétique de deux nombres entiers naturels, consécutifs et pairs ?

b. Par quels nombres est divisible la somme de cinq entiers naturels consécutifs ?

c. Par quels nombres est divisible la somme de m entiers naturels consécutifs (m entier naturel)?

12 *Question de volume*

ABCD est un carré en carton de 12cm de côté. A chaque coin, on découpe un petit carré de 2x cm de côté. Donner la formule algébrique réduite qui exprime le volume du parallélépipède rectangle qu'on obtient en pliant le carton ainsi découpé.

13 *Pourcentages*

Les dimensions d'un rectangle augmentent de 15%. De quel pourcentage augmente son périmètre ? Et son aire ?

14 *Manipuler*

Réduire les expressions suivantes

a. $-(-2x)-(-(-x+3x))$

b. $(-5x-y)-(3x-((x-y)-(2x+y))-x)$

15 *Géométrie ?*

a. Exprimer par une formule l'aire et le périmètre de l'étiquette recouvrant exactement le côté d'une boîte de conserve cylindrique dont la hauteur et le diamètre de la base mesurent $2x$ cm.

b. Exprimer par une formule l'aire d'un losange dont l'une des diagonale mesure le triple de l'autre.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

10 *Traduction*

a. $(a+b)-a\cdot b$

b. $4n$; $4(n+1)$; $4(n+2)$ avec n entier

c. $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)$ avec n entier

d. $5n+4$ avec n entier

11 *Arithmétique*

a. $2n+1$

b. Par 5.

c. Par *m* si *m* est impair.

12 $\text{Volume}=32x(x-3)^2$

13 *Pourcentages*

Le périmètre augmente de 15% et l'aire augmente de 32,25%.

14 *Manipuler*

a. $4x$

b. $-8x-3y$

15 *Géométrie ?*

a. $\text{Aire}=4\pi x^3$ $\text{Périmètre}=4\text{x}(\pi+1)$

b. $\text{Aire}=\frac{3x^2}{2}$

"La découverte mathématique est le fruit d'un mélange rare de concentration et de désir"

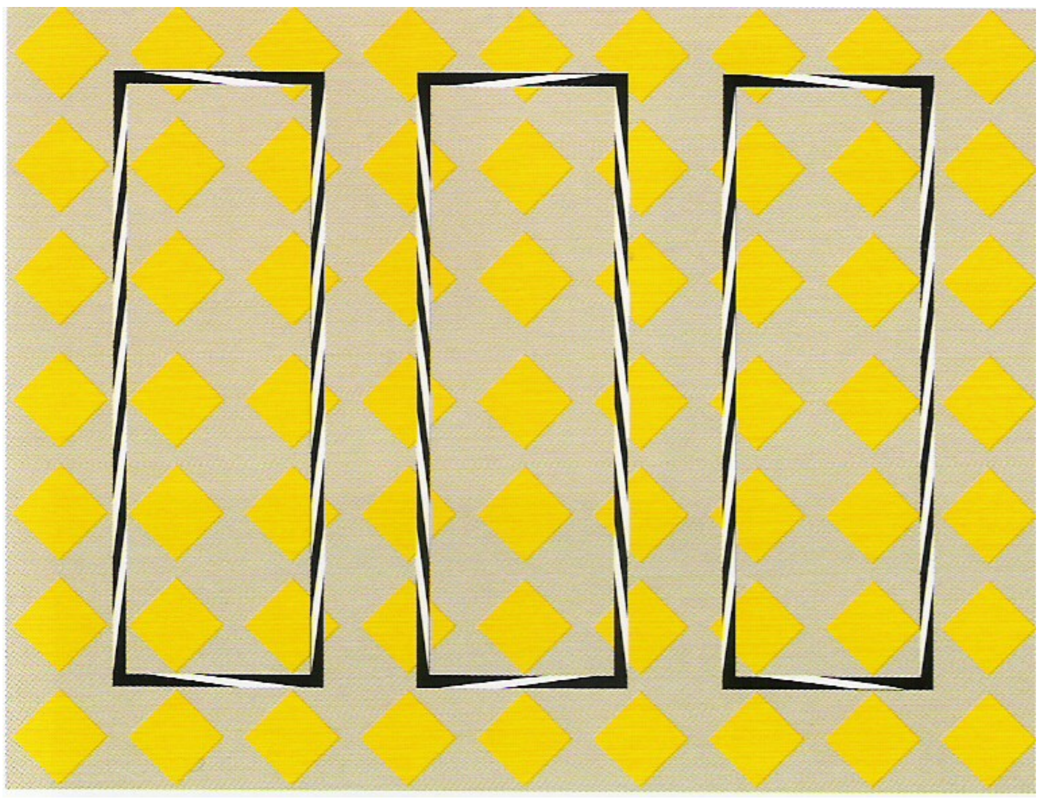
Paul Valéry

A connaître, pouvoir expliquer ou illustrer

- ✔ Passer des nombres aux lettres mérite réflexion et explication.
- ✔ Les règles de calcul sur les nombres s'appliquent de manière similaire sur les lettres.
- ✔ Vocabulaire lié aux expressions littérales : variable, constante, expression.
- ✔ Vocabulaire et traduction algébrique qui permet de caractériser certains nombres : nombres pairs, impairs, multiples, se terminant par, etc.
- ✔ Utilité d'une approche algébrique pour résoudre un problème.
- ✔ Importance du contexte pour interpréter correctement un énoncé mathématique.
- ✔ Hypothèse implicite.
- ✔ Avoir conscience du temps historique qui a été nécessaire pour mettre en place de tels concepts, outils, notations, ...

Savoirs-faire

- ✔ Transformer en langage algébrique des informations numériques données en français.
- ✔ Transformer en langage algébrique une situation donnée en français ou graphiquement (modéliser un problème).
- ✔ Écrire en français une expressions mathématique.
- ✔ Manipuler les expressions algébriques simples.
- ✔ * Enoncer et démontrer la formule sur la somme des n premiers entiers.



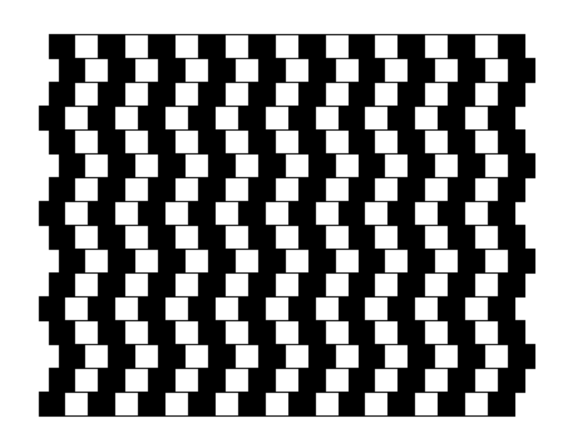
Les trois rectangles ci-dessus sont-ils droits ?

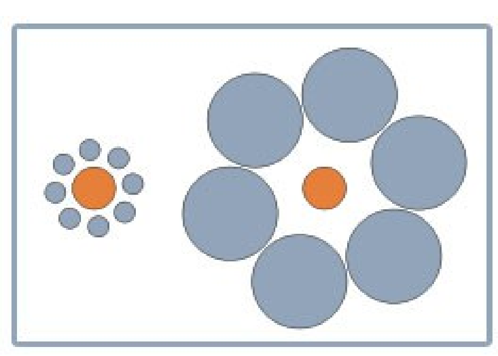
Source : Illusions d'optiques
Ed. Mango Jeunesse, 2004

Problème

Choisir un nombre A à trois chiffres. Construire le nombre B qui intervertit dans A le chiffre des centaines avec celui des unités. Soustraire le plus grand nombre à l'autre entre A et B; on obtient un nombre C. Construire le nombre D qui intervertit dans C le chiffre des centaines avec celui des unités. Additionner C et D.
Effectuer cette suite d'instructions avec plusieurs nombres.
Enoncer une conjecture quant au résultat, puis la démontrer.

Activité 1 Il faut se méfier de ce que l'on voit





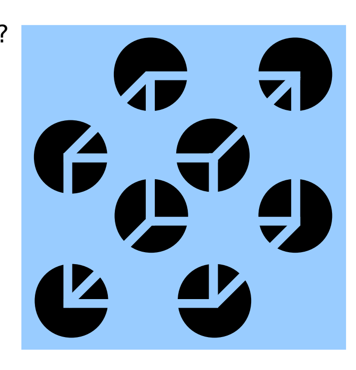
Illusion de Titchener

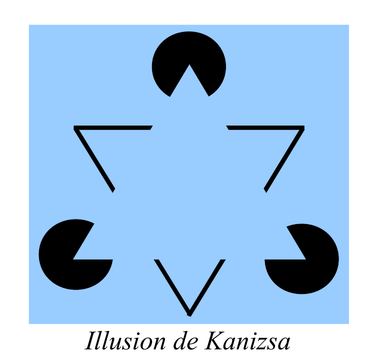
1. Comment semblent positionnées les lignes de la première image les unes par rapport aux autres?

2. Que dire de la taille des deux disques oranges de la deuxième image?

Activité 2 Il faut se méfier de ce qui n'existe pas

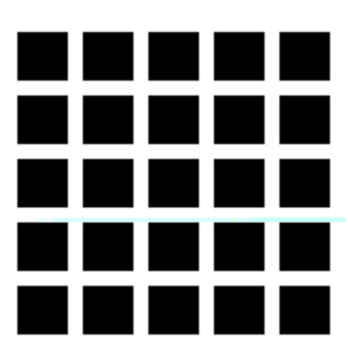
1. Que voit-on?

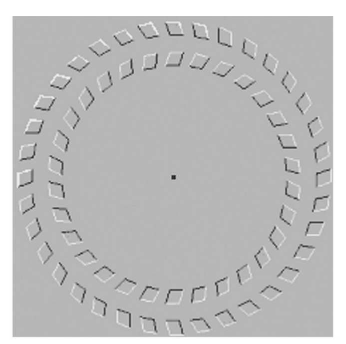




Illusion de Kanizsa

2. On considère les deux figures ci-dessous:





Baingio Pinna

a. Qu'aperçoit-on à l'intersection des lignes de la figure de gauche? Est-ce réel ?

b. Bien fixer le point au centre de la figure de droite tout en s'approchant et en s'éloignant de la page. Un effet surprenant se produira...

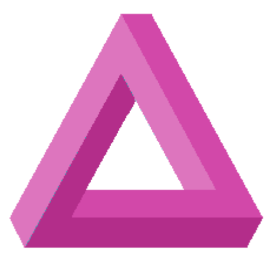
Activité 3 Il faut se méfier des évidences

1. Résoudre les problèmes:

a. Une bouteille d'huile d'olive coûte 6 CHF. L'huile d'olive coûte 5 CHF de plus que la bouteille. Combien coûte la bouteille vide?

b. Le prix d'un meuble est diminué de 50 % puis augmenté de 50 %. Quel est alors son prix?

2. Que peut-on observer à propos du *triangle de Penrose* ci-dessous ?



3. Faire une recherche sur les œuvres du dessinateur M.C. Escher et en particulier sur les lithographies intitulées « *Belvédère* », « *Montée et descente* », « *Mouvement perpétuel* ». Ces dessins paraissent normaux au premier coup d'œil mais en y regardant de plus près, que constate-t-on?

Activité 4 Logique

On considère quatre cartes recto-verso, chacune comportant une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre. On voit ceci: A R 2 5

Alexandre affirme: « S'il y a une voyelle d'un côté d'une carte, alors il y a un chiffre pair de l'autre ».
Quelles cartes faut-il retourner au minimum pour pouvoir vérifier si cette affirmation est vraie ?

Activité 5 Des astronautes

Voici deux affirmations qu'on accepte comme vraies:

- Une réunion des astronautes du monde entier a lieu à Paris.
- Les astronautes américains portent tous une chemise rouge.

Lire et répondre aux questions qui suivent en justifiant:

a. A l'aéroport, quelqu'un porte une chemise rouge. Est-ce un astronaute américain ?

b. A côté de lui, quelqu'un a une chemise blanche. Est-il astronaute américain?

c. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge?

d. Dans le hall, un astronaute américain a un manteau. Porte-t-il une chemise rouge?

Activité 6 Des conclusions

1. Drôles de chats

Les deux premières affirmations sont vraies. Qu'en est-il de la conclusion?

•Tous les chats ont de longues griffes.
•Tous les animaux qui ont de longues griffes sont noirs.
•Conclusion: tous les chats sont noirs.

1. Pauvres commerçants

Les deux premières affirmations sont vraies. Qu'en est-il de la conclusion?

•Aucun épicier n'est riche.
•Quelques commerçants ne sont pas des épiciers.
•Conclusion: quelques commerçants sont riches.

Activité 7 Prévoir l'avenir...

Choisir un nombre, ajouter 25 à ce nombre, multiplier le résultat par 2, retrancher le double du nombre choisi au départ, diviser le résultat par 50.

a. Effectuer cette suite d'instructions avec plusieurs nombres.

b. Énoncer une conjecture quant au résultat, puis la démontrer.

Activité 8 Prendre position

Voici une conjecture:

« «Quelque soit le nombre entier naturel n que je choisisse, l'expression n^2+n+41 est un nombre premier »

Est-elle vraie? Justifier.

Activité 9 Conjectures

Soit n un nombre entier naturel. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Zéro est un nombre pair.

b. Tout nombre pair peut s'écrire sous la forme $4n$.

c. $4n$ est un nombre pair.

d. $2n + 3$ est un multiple de 3.

e. $1000n + 56$ est un multiple de 8.

Activité 10 Démontrer

On considère les conjectures suivantes:

a. Conjecture: Le carré d'un nombre pair est toujours un nombre pair.

b. Conjecture: Si n est pair, alors n^2 est pair

c. Conjecture: Si n^2 est pair, alors n est pair

d. Conjecture: Un multiple de 24 est souvent un multiple de 16.

Sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

Activité 11 Pas dans n'importe quel sens

Compléter chaque expression par le symbole correct ($\Leftarrow$; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$), de telle sorte qu'elle soit vraie (x, y et z sont des nombres entiers relatifs):

a. ($x = 3$ et $y = 2$) .... $x + y = 5$

b. $x^2 = 4$ .... $x = 2$

c. ($x > 0$ et $y < 0$) .... $xy < 0$

d. $x^2 + y^2 = 0$ .... ($x = 0$ et $y = 0$)

e. $xy = 1$ .... ($x = 1$ et $y = 1$)

f. Deux droites sont perpendiculaires .... ces droites sont sécantes.

2. Pour chacune des conjectures ci-dessous, déterminer si elles sont vraies ou fausses, écrire la réciproque et la contraposée:

a. Si je prends mon bain, alors je suis trempé(e).

b. Si un nombre naturel est divisible par 7, alors il se termine par 7.

c. Si un nombre naturel n est un multiple de 9, alors n est un multiple de 3.

d. Si un nombre naturel n est pair, alors $(n+1)$ est un nombre impair.

e. Si $x + y = 0$, alors ($x = 0$ et $y = 0$).

3. Déterminer si les conjectures, réciproques et contraposées énoncées ci-dessus sont vraies ou fausses.

4. Établir la relation de véracité entre une conjecture et sa réciproque, entre une conjecture et sa contraposée.

Activité 12 Absurde?

* Pourquoi « sait-on » que 1+1=2? Et que $ab=ba$?

A savoir 1 Raisonnement logique et construction mathématique

En logique aristotélicienne, le **syllogisme** est un raisonnement logique à deux propositions (également appelées prémisses) conduisant à une conclusion qu'Aristote a été le premier à formaliser. Les deux prémisses (dites « majeure » et « mineure ») sont des propositions données et supposées vraies, le syllogisme permettant de valider la véracité formelle de la conclusion.

Exemple

« Tous les hommes sont mortels, or les Grecs sont des hommes, donc les Grecs sont mortels » est un syllogisme ; par contre, « Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat » n'en est pas un!

Le **principe du tiers exclu** exprime que si deux propositions sont contradictoires, l'une est vraie et l'autre fausse

Remarque: c'est à Aristote (-384/-322) qu'on doit les fondements de notre raisonnement hypothético-déductif (voir par exemple http://serge.mehl.free.fr/chrono/Aristote.html)

Une **conjecture** est une supposition fondée sur des apparences, non (encore) démontrée, et soumise à la perspicacité des mathématiciens. En principe, lorsqu'on énonce une conjecture, on pense qu'elle est vraie, mais on peut se tromper ! En mathématiques, une conjecture est **soit vraie, soit fausse**, selon le **principe du tiers-exclu**. Dire qu'elle est **vraie** signifie qu'elle est vérifiée dans tous les cas possibles, sans exception; le procédé qui établit cette généralité s'appelle une **démonstration**. Dire qu'elle est **fausse** signifie qu'elle n'est pas vraie dans au moins un cas, qu'on appelle **contre-exemple**. De fait, une seule exception suffit donc à établir qu'une conjecture est fausse.

Exemple

« Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers» est une célèbre conjecture, dite conjecture de Goldbach (mathématicien russe, 1690-1764) énoncée dans une lettre à Euler le 7 juin 1742 et qui n'est toujours pas démontrée à ce jour.

Une conjecture est composée d'une ou plusieurs **hypothèses**, c'est à dire les conditions nécessaires pour que le résultat énoncé se réalise assurément, et d'une ou plusieurs **conclusions**, le résultat lui-même.
Si ... , alors ... est une formulation souvent utilisée pour énoncer une conjecture.
On parle alors d'**implication**, et on le note [...hyp...] ⇒ [...concl...].

Si .... , alors ....

hypothèse(s) ⇒ ***conclusion(s)***

Exemple

« Si n est un nombre pair, alors n s'écrit comme somme de deux nombres premiers», ou « n est un nombre pair ⇒ n s'écrit comme somme de deux nombres premiers» est l'énoncé sous forme d'implication de la conjecture de Goldbach. « n est un nombre pair » est l'hypothèse et « n s'écrit comme somme de deux nombres premiers» la conclusion.

La **réciproque** d'un énoncé s'obtient en permutant hypothèse(s) et conclusion(s).
Il n'y a pas de lien entre la véracité d'un énoncé et de sa réciproque: les deux peuvent être vrais ensemble, faux ensemble, ou l'un être vrai et l'autre faux. Si un énoncé et sa réciproque sont tous les deux vrais, on parle d'**équivalence**, ce qu'on note [...] ⇔ [...].

Exemples

La réciproque de « Si n est un nombre pair, alors n^2 est pair » est « Si n^2 est un nombre pair, alors n est pair ». Dans ce cas, les deux sont vraies.

On peut écrire: « n est pair ⇔ n^2 est pair »

La réciproque de « Si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 », qui est vraie, est « Si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 6 »; elle est fausse.

La **contraposée** d'un énoncé s'obtient en permutant hypothèse(s) et conclusion(s) et en prenant leurs négations.
Il y a un lien entre la véracité d'un énoncé et de sa contraposée: les deux sont soit vrais ensemble, soit faux ensemble. On peut alors choisir de démontrer la contraposée d'une conjecture plutôt que la conjecture elle-même.

Exemples

La contraposée de « Si n^2 est un nombre pair, alors n est pair » est « Si n n'est pas un nombre pair, alors n^2 n'est pas pair ».

Dans ce cas particulier, on choisit de démontrer la contraposée pour obtenir la véracité de la conjecture de départ.

Un **contre-exemple** est un exemple qui contredit une conjecture et qui permet donc de démontrer qu'elle est fausse. Attention: des exemples qui vérifient une conjecture, même nombreux, ne suffisent pas à démontrer que la conjecture est vraie (sauf si la conjecture décrit un nombre de cas fini qu'il est possible de tous vérifier).

Exemple

n=41 est un contre-exemple à la conjecture qui affirme que n^2+n+41 est premier pour tout n entier naturel. En effet, $41^2+41+41=41(41+1+1)$ n'est pas premier.

Une **démonstration** est un raisonnement établissant la véracité d'une conjecture à partir des axiomes posés, des définitions connues et des théorèmes déjà démontrés.

Exemple

Démontrons que « Si n est un nombre impair, alors n^2 est impair »:

	n est un nombre impair	←	c'est l'hypothèse
donc	$n=2k+1$ où k est un entier relatif	←	Par définition connue de « nombre impair »
donc	$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$	←	On utilise des résultats connus d'algèbre (déjà démontrés)
puis	Posons $k'=2k^2+2k$, d'où $n^2=2k'+1$	←	On renomme une expression
donc	k' est un entier relatif	←	Car k l'est aussi, et somme et produit d'entiers relatifs le sont
donc	n^2 est impair	←	Par définition connue de « nombre impair »

Du grec "axioma : j'estime, je crois vrai", l'**axiome** est une vérité admise sans démonstration et sur laquelle se fondent les théories mathématiques.
Du latin "postulare : demander", le **postulat** est une proposition première indémontrable ou indémontrée, que le mathématicien demande au lecteur d'accepter.
L'axiome est une "évidence", contrairement au postulat qui ne l'est pas forcément. Dans ce cours, nous nous contenterons de parler d'axiome.

Exemple

En géométrie, le fait que par un point donné passe une unique parallèle à une droite donnée est un axiome. On l'accepte comme vrai sans démonstration.

En mathématiques, une **définition** est un énoncé qui introduit un nouveau mot ou symbole décrit à l'aide d'autres mots ou symboles dont le sens a déjà été précisé. Une définition ne démontre rien, elle donne une dénomination à des objets mathématiques nouveaux.

Exemple

« Un entier relatif n est pair s'il peut s'écrire sous la forme $n=2k$ où k est un entier relatif. » On définit le nouveau mot « pair » en admettant que « entier relatif » et des écritures algébriques comme $n=2k$ ont déjà été définies préalablement.

Un **théorème** est une conjecture qui a pu être démontrée à l'intérieur d'un système mathématique. Un théorème découle des axiomes et postulats qu'on a posé auparavant, ainsi que sur des définitions connues et d'éventuels autres théorèmes préalablement démontrés.
Un théorème est composé d'une ou plusieurs **hypothèses**, et d'une ou plusieurs **conclusions**. Il arrive souvent que certaines hypothèses ne soient pas exprimées spécifiquement dans l'énoncé du théorème, mais qu'elles soient implicites compte-tenu du contexte; on parle alors d'**hypothèses implicites**,

Exemple

« Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, alors il n'existe aucun a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ » est un célèbre théorème (le théorème de Fermat), énoncé dans la première moitié du XVIIe siècle et démontré seulement en 1994 par Andrew Wiles.

« Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 » est l'hypothèse

« alors il n'existe aucun a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ » est la conclusion

Si on avait énoncé le théorème ainsi: « Si $n \geq 3$, alors il n'existe aucun a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ », le fait que n doive être entier naturel aurait été considéré comme une hypothèse implicite.

Remarque: il faut bien faire la différence dans l'utilisation du terme « hypothèse » en mathématique, où il s'agit d'élément(s) qu'on accepte afin d'en déduire un ou des conclusions, et en sciences expérimentales, où il s'agit de la vérifier expérimentalement !

A savoir 2 Carré et parité

Théorème

- ☐ Soit n un entier relatif. On a: n est pair $\Leftrightarrow$ n^2 est pair.
- ☐ Soit n un entier relatif. On a: n est impair $\Leftrightarrow$ n^2 est impair.

Exercices d'entraînement

1 *Programmes*

On considère les programmes de calcul suivants:

Programme A :	Programme B :
Choisir un nombre ; Effectuer le produit de la différence du double du nombre et de 8 par la somme du nombre et de 3 ; Annoncer le résultat.	Choisir un nombre ; Calculer son carré ; Lui soustraire la somme du nombre de départ et de 12 ; Multiplier le résultat par 2 ; Annoncer le résultat.

a. Tester ces deux programmes avec comme nombres de départ 4 ; − 1 et 0.

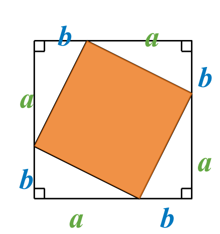
b. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

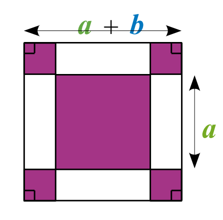
c. Démontrer cette conjecture.

2 Que penser des valeurs de n^3-n pour n un entier relatif?
Sont-elles toujours multiple d'un entier connu?
Énoncer une conjecture.

3 *Comparaison*

Soient deux carrés de côté $a+b$; a et b sont des nombres positifs. Comparer les aires des surfaces coloriées





(les quadrilatères violets sont des carrés).

Justifier

4 Soit *n* est un nombre entier naturel. On considère les conjectures suivantes. Les écrire sous la forme « Si ..., alors ... ». Sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

b. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

c. $4n$ est un nombre pair.

d. $n+3$ est un nombre pair.

e. $2n+3$ est un multiple de 3.

f. $3n+3$ se termine par 3.

g. $3n+3$ est un multiple de 3.

h. $n+4$ est un nombre pair.

i. $2n-1$, $2n$ et $2n+1$ sont trois nombres consécutifs.

5 Conjecture : Si x est un entier, alors
$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

a. Cette conjecture est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

b. En déduire que $101^{11}-1$ est divisible par 100.

6 Conjecture : La différence des carrés de deux nombres pairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Cette conjecture est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

7 *Arithmétique*

Un entier relatif étant choisi, démontrer la propriété suivante :« Le produit de l'entier qui le précède par l'entier qui le suit, augmenté de 1 est le carré de cet entier. ».

8 *Réciproques et contraposées*

On suppose l'implication suivante vraie : *si j'aime le jazz, alors j'écoute souvent des disques de jazz.*

a. Vous constatez que je n'écoute pas souvent des disques de jazz. Vous dites alors que je n'aime pas le jazz.

b. Vous constatez que j'écoute souvent des disques de jazz. Vous dites alors que j'aime le jazz.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

9 *Pour x et y des réels, donner la contraposée et la réciproque des implications.*

a. $x < y$ implique $x^3 < y^3$

b. $x^2 < x$ implique $x < 1$

c. $x^2 < 0$ implique $x < 0$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

10 Pour un nombre n entier, démontrer les conjectures suivantes.

a. Tout nombre pair peut s'écrire sous la forme 4n,

b. $2n + 3$ est un nombre impair.

c. $n^2 + 1$ est un nombre impair.

d. $2n (2n + 2)$ est un multiple de 4.

e. $1000n + 56$ est un multiple de 8.

f. $n + 5$ se termine par 5.

g. $6n + 3$ est un nombre premier.

h. L'expression $(2n + 1)^2 - 1$ est un multiple de 8.

11 Indiquer pour chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux et argumenter !

a. La somme de quatre nombres naturels consécutifs est un multiple de 4.

b. La somme de deux impairs consécutifs est un multiple de 4.

c. Le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.

d. La somme de deux nombres naturels consécutifs est impaire.

e. Le produit de deux nombres naturels consécutifs est impair.

f. Le produit de deux impairs consécutifs est impair.

g. La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

h. Le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 6.

12 On suppose l'implication suivante vraie : *s'il pleut quand je sors, alors je prends mon parapluie.*

a. Vous constatez je n'ai pas mon parapluie. Vous dites alors que il ne pleuvait pas quand je suis sortie.

b. Vous constatez que j'ai mon parapluie. Vous dites alors que il pleuvait quand je suis sortie.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

13 On suppose l'implication suivante vraie : *si il fait noir, alors je ne peux pas lire un livre.*

a. Vous constatez que je ne lis pas de livre. Vous dites alors que il fait noir.

b. Vous constatez que je lis un livre. Vous dites alors que il ne fait pas noir.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

10

a. Faux. **c.** Faux. **e.** Vrai. **g.** Faux.

b. Vrai. **d.** Vrai. **f.** Faux. **h.** Vrai.

11

a. Faux **c.** Vrai. **e.** Faux. **g.** Vrai.

b. Vrai. **d.** Vrai. **f.** Vrai. **h.** Vrai.

12

a. contraposée.

b. réciproque.

13

a. réciproque.

b. contraposée.

Exercices d'approfondissement

1 Calculer, observer, formuler une conjecture, et la prouver lorsque c'est possible:

a.
$9\cdot 9+8=$
$99\cdot 9+8=$
$999\cdot 9+8=$

b.
$6^2-5^2=$
$56^2-45^2=$
$556^2-445^2=$
$5556^2-4445^2=$

2 Observer, conjecturer et généraliser:

a. $1^2=1$

b. $11^2=121$

c. $111^2=12321$

d. $1111^2=1234321$

Puis calculer

$$123456789^2+2\cdot 9876543211\cdot 9876543209+9876543209^2$$

3 *Étymologies*

a. Quelle est l'étymologie du mot « mathématique »?

b. Rechercher les étymologies de tous les termes liés à la construction mathématique travaillés dans ce chapitre.

4 *Nombres pentagonaux*

a. Donner les huit premiers nombres pentagonaux P1 à P8 et donner une expression pour le nième nombre pentagonal.

b. Démontrer que tout nombre pentagonal est égal à son côté augmenté de trois fois le triangulaire de rang précédent.

c. Démontrer le lien entre les nombres pentagonaux et triangulaires : $3\mathrm{P}_n=T_{3n-1}$

5 Choisir au hasard cinq nombres consécutifs a, b, c, d et e.

Démontrer que $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ est un multiple de 5.

6 *Les nombres premiers*

Définition
Un nombre entier naturel *n* est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et *n*.
Tout nombre entier naturel possédant plus de deux diviseurs est **composé**. Le nombre 1 est appelé une **unité** et n'est ni composé, ni premier.

a. Énumérer l'ensemble des nombres premiers plus petit que 100.

b. Les nombres suivants sont-ils premiers : 187 ; 389 ; 841 ; 899 ?

c. Élaborer un algorithme permettant de prouver qu'un nombre donné est premier.

d. Questions:

- Existe-t-il une infinité de nombres premiers ?
- Si oui, comment se répartissent-ils ?
- Existe-t-il une formule permettant de tous les énumérer ?
- Y a-t-il un algorithme 'rapide' qui permet de les identifier ?
- Quelles relations existe-t-il entre les nombres composés et les nombres premiers ?

7 *Aristote*

Faire une recherche autour du personnage d'Aristote, de la logique aristotélicienne et de son impact sur les mathématiques.

"Il y a trois sortes de mathématiciens,
ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas"

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ Les principes de la constructions mathématiques : axiomes – définition – conjecture – démonstration – théorème - contre-exemple.
- ✔ Le principe du tiers exclu.
- ✔ La structure d'une conjecture : hypothèse(s), conclusion(s).
- ✔ Tenir compte des hypothèses implicites.
- ✔ La structure d'une démonstration si la conjecture est vraie.
- ✔ Le lien de véracité entre une conjecture et sa contraposée ; l'absence d'un tel lien entre la conjecture et sa réciproque.
- ✔ Se questionner sur les « règles » apprises et leur éventuelle démonstration; quel statut ont-elles: axiome, théorème?

Savoirs-faire

- ✔ Maîtriser le vocabulaire et les notations y relatives.
- ✔ Écrire une conjecture sous la forme « Si ... , alors ... ».
- ✔ Identifier les hypothèses et conclusions dans l'énoncé d'une conjecture.
- ✔ Démontrer qu'une conjecture est fausse en exhibant un contre-exemple.
- ✔ Démontrer qu'une conjecture est vraie en produisant une démonstration claire.
- ✔ Énoncer réciproques et contraposées.

Chapitre 4 - Autres nombres



Le papyrus de Rhind

Problème

Trouver deux entiers de 8 chiffres tels que la somme de leurs carrés puisse être obtenue par la juxtaposition des deux nombres.

Par exemple les deux entiers à 2 chiffres 12 et 33 sont tels que

$$12^2+33^2= 1233.$$

Activité 1 Multiples, diviseurs

1. Le jeu de Juniper-Green

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec les nombres entiers de 1 à 40.
Le premier joueur choisit un nombre entier. Le deuxième joueur doit alors en choisir un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre et toujours parmi les nombres entiers de 1 à 40.
Le joueur suivant en choisit encore un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur du second nombre. Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné !

a. Jouez à ce jeu, en alternant le premier joueur.

b. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ? Même question avec 17 ; 9 et 23.

c. Dans une partie à deux joueurs, quel nombre peut choisir le premier joueur pour être sûr de l'emporter (s'il joue bien !) ? Trouver toutes les possibilités.

2. Critères

Enoncer et justifier les critères de divisibilité par 2,3 et 5. En connaissez-vous d'autres?

3. Problèmes

a. Un chocolatier vient de confectionner 28313 pralinés identiques. Il a prévu de placer ces pralinés dans des boites contenant chacune 29 pralinés.
Combien de boites parviendra-t-il à remplir au maximum et combien de pralinés non emballés restera-t-il ?

b. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Comment les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes (tous les élèves doivent être dans une équipe). Donner ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Expliquer la démarche.

Activité 2 Fractions

1. Les Egyptiens, il y a quatre millénaires déjà, se posaient des questions mathématiques. Nos connaissances sur l'état des mathématiques à cette époque se fondent sur quelques rares manuscrits qui attestent néanmoins d'un niveau relativement élevé aussi bien en mathématiques qu'en astronomie. N'oublions pas que l'Egypte utilisait un calendrier de 365 jours ! Cependant, de façon générale, les objectifs de la mathématique égyptienne sont essentiellement d'ordre pratique, liés au commerce, au fisc, au cadastre ou à l'art de la construction. Un des plus anciens documents qui nous soient parvenus date de 1650 avant J.-C. Il s'agit d'un texte écrit en hiératique (forme cursive des hiéroglyphes) sur papyrus. Il commence par cette introduction qui a permis de le dater : "Calcul exact. L'accès à la connaissance de toutes les choses existantes et de tous les secrets obscurs. Ce livre fut copié la 33 année, le 4ème mois de la saison de l'inondation, sous la majesté du roi de Haute et Basse-Egypte, A-user-Ré (un des rois Hyksos), . . . c'est le scribe A'h-mosé qui copia cet écrit". Ce document, retrouvé dans les ruines du Rameseion à Thèbes, fut acheté en 1858 par A. Henry Rhind, un antiquaire écossais. Déchiffré vers 1890, il est actuellement conservé au British Museum de Londres. Le papyrus de Rhind expose la solution de problèmes, énoncés de manière fort concise, portant sur divers sujets d'arithmétique et de géométrie : opérations utilisant les fractions, partages, calculs des aires de formes géométriques simples (dont le cercle) et des volumes de récipients, mensurations de pyramides. Une fois le problème posé, le résultat est donné directement sans indication d'un raisonnement général explicite, la solution

étant simplement suivie d'une vérification. Par exemple, le problème n°24 :"Inconnue, son septième, le tout est 19 ". Autrement dit : "La somme d'un nombre et de son septième est 19, quel est ce nombre ? " La réponse donnée,suivie d'une vérification, est $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

La manière qu'avaient les Egyptiens d'utiliser les fractions est très particulière,à la fois primitive et sophistiquée. En effet, à l'exception de 23 et, plus rarement,34, pour lesquels ils disposaient de hiéroglyphes spéciaux, ils calculaient par quantièmes, c'est-à-dire que seules les fractions ayant un numérateur égal à 1 leur étaient d'usage facile, avec un symbolisme adéquat pour les représenter. Il s'ensuit que l'un des premiers problèmes rencontrés était de représenter toute quantité fractionnaire en une somme de fractions unitaires. Pour ce faire, les scribes se référaient à des tables et notamment des tables qui donnent, pour chaque fraction de la forme $\frac{2}{n}$ sa représentation en somme de fractions unitaires différentes.


Papyrus de Rhind

Le papyrus de Rhind contient une telle table de division de 2 par tous les nombres impairs compris entre 5 et 101 :

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; ...; $\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$;...; $\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$;...; $\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

Il est très vraisemblable que beaucoup de ces résultats ont été obtenus par tâtonnements.

Il est intéressant de remarquer que, contrairement aux Egyptiens, les Babyloniens,avant eux, et les Romains longtemps après, adoptèrent des expressions fractionnaires à dénominateur constant ; 60 pour les premiers, 12 pour les seconds. Chez les Babyloniens, les multiples et les sous-multiples de l'unité se succèdent,en notation positionnelle, suivant le système sexagésimal, comme nous pour notre système décimal. La division du degré en 60 parties égales date de cette époque (3000 ans avant J.-C.). Chez les Romains, le dénominateur étant 12, chaque quantité fractionnaire est convertie approximativement en douzièmes. L'as, la plus ancienne monnaie romaine, était l'unité par excellence. Le douzième de l'as était l'once (uncia), et les cinq douzièmes le "quincunx" (quinque uncia, origine du mot "quinconce"). Dans son Art poétique (Epitre II), Horace décrit ainsi une leçon dans une école romaine : "Dis-moi, fils d'Albinus, si de cinq onces tu ôtes une once, que reste-t-il ? (si dequinconce remota est uncia, quid superat ?) ... Réponds donc !-Le tiers d'un as.- Très bien ! Tu sauras défendre ton patrimoine. Et, si on ajoute une once ?-Un demi-as."

Source: Algèbre mode d'emploi, Charrière, LEP 199755

a. Vérifier que $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ est bien solution du problème n°24.

b. Déterminer la décomposition de $\frac{3}{97}$ puis de $\frac{2}{7}$ en fractions unitaires.

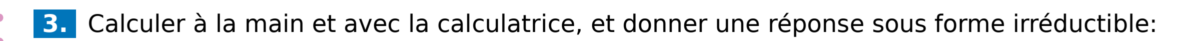
c. Vérifier le calcul proposé par Horace.

2. "L'essentiel dans l'usage des nombres, c'est de s'en former une idée nette ; quand je dis un, j'ai idée d'une seule chose existante et isolée ; quand je dis deux, c'est la même chose prise deux fois ; trois, c'est la même chose, prise trois fois ; et ainsi de suite. Il n'en est pas de même des fractions ; l'esprit les conçoit bien moins facilement que les nombres entiers ; si je dis une demie, je conçois la même chose, partagée en deux parties ; si je dis un tiers, il faut concevoir la même chose partagée en trois parties ; tant que je n'ai qu'une fraction, cela va bien ; mais quand je veux les comparer, cela n'est pas aisé, et vous verrez que, parmi les personnes qui n'ont pas exercé leur esprit à compter, il y en aura peu qui puissent vous dire sur-le-champ, de combien un demi est plus grand qu'un tiers, de combien un quart est plus grand qu'un cinquième, ... et vous avez vu, parce qu'on vous a dit qu'il faut faire un certain calcul pour les réduire au même dénominateur, notre esprit ne conçoit et ne compare facilement que les nombres fractionnaires dont le dénominateur est le même, parce qu'il regarde le dénominateur comme un tout dont il voit les différentes parties. Cet inconvénient n'a pas lieu dans l'arithmétique décimale..."

Joseph Louis Lagrange, (1736-1813)

a. Qui était Joseph Louis Lagrange?

b. Illustrer avec nos notations son propos.



3. Calculer à la main et avec la calculatrice, et donner une réponse sous forme irréductible:

a. $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$

b. $\frac{5}{21}+\frac{12}{15}$

c. $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$

d. $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{6}\right)$

e. $\frac{120}{49}\cdot\frac{56}{144}$

f. $\frac{102}{23}\cdot\frac{100}{34}$

g. $\frac{25}{36}\div\frac{5}{16}$

h. $\frac{33}{34}\cdot\frac{51}{66}\cdot\frac{12}{9}$

i. $-\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{16}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

j. $\frac{14^3\cdot 9^4}{42^3\cdot 9^2}$

k. $-1\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{5}\cdot(-1)$

4. Calculer $\dfrac{\frac{-14}{15}-\frac{17}{12}:\frac{1}{8}}{\frac{-4}{9}+1+\frac{1}{3}}$ directement à l'aide de la calculatrice (donner le résultat sous forme simplifiée au maximum et indiquer la séquence de touches utilisée).

5. Rendre irréductible:

a. $\frac{216}{720}$

b. $\frac{1122}{1496}$

c. $\frac{1826688}{829280}$

6. Exprimer en heures et fractions d'heures:

a. 75 minutes

b. 55 minutes

c. 90 minutes

d. 666 minutes

e. 145 minutes, 16' et 35''

Activité 3 Proportions

1. Commenter cette annonce d'un journaliste : "Une nouvelle hausse de 15% sur le tabac interviendra le 1er septembre prochain qui, ajoutée la la hausse de 10% survenue le 1er mars, aura augmenté le prix du paquet de cigarettes d'un quart sur l'année".

2. Combien faut-il changer de chf pour obtenir 350 euros au taux de change du jour (le chercher sur internet).

3. Une poule et demi pond un oeuf et demi en un jour et demi. Combien d'oeufs pondront 12 poules en 12 jours ?

4. Après 10 minutes de vol, une fusée atteint la vitesse de $8112\frac{m}{s}$ et se trouve à une altitude de 2000km par rapport au sol.

a. Convertir cette vitesse en $\frac{km}{h}$.

b. En admettant que sa vitesse est ensuite constante, représenter graphiquement la distance parcourue en fonction de du temps. Comment appelle-t-on ce type de relation entre deux variables?

Activité 4 Nombres rationnels

1. Déterminer les nombres rationnels correspondants aux fractions suivantes:



a. $\frac{21}{5}$ **b.** $\frac{-2}{9}$ **c.** $\frac{20}{7}$ **d.** * $\frac{20}{17}$

2. Déterminer les fractions correspondants aux nombres rationnels suivants:

a. -2 **c.** 12,347 **e.** $1,\overline{4}$

b. 0,0 **d.** 145,789678 **f.** $21,3\overline{14}$

3. La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Conjecture: La somme, le produit, la différence et le quotient de deux nombres rationnels sont rationnels.

Activité 5 Irrationnalité

1. Démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction.

2. Quel est le nombre le plus proche de 2?

3. Conjecture: $0,\overline{9}=1$. Vrai ou faux?

4. Qu'est-ce qu'un nombre irrationnel? Donner des exemples.

5. La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Conjecture: La somme, le produit, la différence et le quotient de deux nombres irrationnels sont irrationnels.

6. Comment sont « mélangés » les nombres rationnels et irrationnels?

7. Déterminer les expressions qui, après avoir été évaluées, donnent un nombre rationnel:

$$\pi-\pi\,;3\cdot\sqrt{2}\,;1+5.5\,;\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{20}}\,;\frac{\pi}{5}\,;\frac{2}{0}\,;1024\,;\sqrt{\frac{50}{2}}$$

8. Qu'est-ce qu'un nombre réel? Donner des exemples. Existe-t-il des nombres non réels?

Activité 6 Puissances

1. Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales à x^{12} :

a. $\frac{x^9}{x^3}$ **c.** $\frac{x^0}{x^{-12}}$ **e.** $\left(\frac{x^4}{x^2}\right)^6$

b. $(x^2)^{10}$ **d.** $x^0 \cdot x^{-12}$ **f.** xx^{1+10}



2. Calculer

a. $\dfrac{70^{632}\cdot 3^{598}\cdot 7^{0}\cdot 2^{60}\cdot 75}{21^{599}\cdot(-5)^{634}\cdot 2^{692}\cdot 7^{33}}$

b. $\left(\dfrac{(-1)^{987654321}}{(-1)^{123456786}}\right)^{23}$

3. Définir a^n pour n entier naturel non nul, pour n nul, pour n entier relatif négatif, pour n de la forme $\dfrac{1}{m}$ (avec m entier naturel non nul) et pour n rationnel.

4. Simplifier le plus possible et donner une réponse sans exposants négatifs (a et b des rationnels non nuls):

a. $\dfrac{(5a^3)^4\cdot(b^4)^5}{(25\cdot(ab)^4)^2\cdot(b^2)^6\cdot a^4}$

b. $\dfrac{(b^3)^{-4}\cdot(a^{-1}\cdot b^2)^5}{(b^2\cdot b^3)^{-2}\cdot(b^6)^2}\cdot a^4$

5. Transformer $0{,}0000045789$ en écriture scientifique, avec et sans calculatrice.

Activité 7 Racines carrées

1. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. Conjecture: $\sqrt{4}=\pm 2$

b. Conjecture: $\sqrt{a^2}=a$

2. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible:

a. $\sqrt{\dfrac{27}{75}}$

b. $\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}$

c. $\dfrac{\sqrt{(0.64)^{2347}}}{\sqrt{(0.64)^{2247}}}$

d. $\sqrt{1{,}\overline{7}}$

3. En utilisant des décompositions en produits de facteurs premiers, extraire la racine carrée suivante: $\sqrt{324}$

4. Transformer pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » puis simplifier au maximum:

a. $-\dfrac{9}{\sqrt{27}}$

b. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$

c. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{18}-3\sqrt{8}+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

Activité 8 La calculatrice, un outil bien maîtrisé ?

Ces exercices sont conçus pour la calculatrice officielle.

Il s'agit, avec cette calculatrice, d'être le plus efficace et précis possible pour effectuer les calculs demandés (en utilisant si besoin des parenthèses ou les mémoires ...). Pour chaque calcul, vous devez être capable de décrire précisément (par exemple en donnant la suite de touches utilisée) la façon dont la calculatrice a été utilisée.

1. Calculer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de:

a. $4\cdot(2+3)$

b. $2^2\cdot 5$

c. $5\cdot\sqrt{4}$

d. $3\cdot\pi$

e. 0,25 · 0,5

f. le quart de la réponse précédente

g. $\dfrac{-325.201569-2.82589}{42.52}$

h. $\dfrac{4.7\cdot 6.76-0.95}{5.001}$

2. Effectuer les calculs suivants en utilisant l'écriture scientifique de la calculatrice : $(7.28\cdot10^5)\cdot(3\cdot10^5)$ $(-7.28\cdot10^{-5})\cdot(3\cdot10^5)$

3. Simplifier le plus possible $\frac{49005}{6030}$ à l'aide de la calculatrice.

4. Calculer $\frac{7}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}$ à l'aide de la calculatrice en donnant un résultat irréductible.

5. Convertir $\frac{135}{60}$ en nombre décimal, puis exprimer le résultat sous forme de fraction irréductible.

6. Utiliser la machine pour obtenir directement une estimation de $2\cdot\pi$ arrondie au millième.

7. Trouver le ppcm de 3644 et 4568 et le pgcd de 23456656 et 2234544

8. Comment la calculatrice traite-t-elle l'ordre des opérations ? Effectuer des calculs pour vérifier si l'ordre des opérations est le même que celui convenu par les mathématiciens.

9. Comment effectuer cette suite de trois calculs le plus efficacement possible avec la calculatrice ?

a. $3\cdot3$ **b.** $3\cdot3\cdot9$ **c.** $\sqrt{3\cdot3\cdot9}$

10. Peut-on retrouver, réutiliser, modifier un calcul effectué précédemment ?

11. Comment fait-on pour récupérer le résultat du dernier calcul, par exemple pour le réutiliser dans un nouveau calcul ?

12. Comment effectuer la répétition successive de la même opération, par exemple calculer les 8 premières puissances successives de 2 ?

13. Comment efface-t-on un message d'erreur ou la ligne en cours d'édition ?

14. Quelle différence y a-t-il entre les touches INS , DEL et CLEAR ?

15. Mettre 15 dans la première mémoire, puis utiliser cette mémoire pour calculer $7\cdot15^2$ puis $\frac{7\cdot15^2}{4}$

16. Comment réinitialiser la calculatrice ?

17. On considère l'expression $\frac{x+y-x}{y}$

a. La calculer à l'aide de la calculatrice pour $x=10^4$ et $y=10^{-4}$

b. La calculer à l'aide de la calculatrice pour $x=10^6$ et $y=10^{-6}$

c. La réduire algébriquement le plus possible (pour x et y quelconques).

d. Que peut-on conclure des calculs précédents?

A savoir 1 Multiples, diviseurs

Définitions

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a=b\cdot k$ où k est un entier naturel.

On dit que : ***a* est un multiple de *b*** ou ***a* est divisible par *b*** ou ***b* est un diviseur de *a*** ou ***b* divise *a***.

Exemple

12 est divisible par 3, 3 est un diviseur de 12, 12 est un multiple de 3.

- Le **PGCD de deux entiers** est leur Plus Grand Diviseur Commun.
- Le **PPCM de deux entiers** est leur Plus Petit Commun Multiple.
- Deux entiers sont **premiers entre eux** si leur ppcm est égal à 1.
- Un entier est **premier** s'il est différent de 1 et seulement divisible par 1 et par lui-même.
- Un entier qui n'est pas **premier** est **composé**.
- Le **quotient** est le résultat de la division.

A savoir 2 Division euclidienne

Définition

a	b
r	q

Effectuer la **division euclidienne de *a* par *b***, c'est trouver deux entiers q et r tels que : $a=q\cdot b+r$ et $0\leq r<b$.
q est le **quotient** et r le **reste** de cette division euclidienne.

Exemple: effectuer la division euclidienne de 183 par 12.

183	12
63	15
3	

On a donc : $183=12\cdot 15+3$ avec $3<12$

A savoir 3 Fractions

Définition

Une **fraction** est un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul; p s'appelle le **numérateur** et q le **dénominateur** de la fraction.

Exemples

- $\frac{2}{5};\frac{-2}{7};\frac{13}{-88};\frac{-4}{-2};\frac{0}{5}$... sont des fractions
- si a ≠ 0, on a: $\frac{0}{a}=0$; par exemple, $\frac{0}{24}=0$. On parle alors de **fraction nulle**.
- $\frac{a}{0}$ n'est pas défini si a ≠ 0 ; par exemple, $\frac{24}{0}$ et $\frac{0}{0}$ ne sont pas des fractions

Définition (égalité de deux fractions)

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont **égales** si et seulement si $ad=bc$

Exemple

$\frac{2}{5}=\frac{-10}{25}$ car $2\cdot 25=-10\cdot 5$

Additionner ou soustraire des fractions

Pour additionner (ou soustraire) des fractions :
- on réduit les fractions au même dénominateur ;
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Exemple : Calculer l'expression A = $-1+\frac{13}{30}-\frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : 30 ; 60 ; 90 ; 120 ...
Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ... ⟵ On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.

A = $\frac{-60}{60}+\frac{13\cdot 2}{30\cdot 2}+\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}$ ⟵ On amplifie chaque fraction pour avoir le même dénominateur commun.

A = $\frac{-60}{60}+\frac{26}{60}+\frac{55}{60}$ ⟵ On réduit les fractions au même dénominateur 60.

A = $\frac{-60+26+55}{60}$ ⟵ On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

A = $\frac{21}{60} = \frac{7}{20}$ ⟵ On simplifie si possible.

Multiplier des fractions

Pour multiplier des fractions et obtenir un résultat irréductible:
- on simplifie chaque fraction ;
- on écrit la fraction comme « produit des numérateurs » sur « produit des dénominateurs »;
- on simplifie.

Exemple : Calculer l'expression A = $\frac{24}{36}\cdot\frac{18}{32}$

A = $\frac{24}{36}\cdot\frac{18}{32}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}$ ⟵ On réduit les fractions

A = $\frac{2\cdot 9}{3\cdot 16}$ ⟵ On écrit la fraction comme « produit des numérateurs » sur « produit des dénominateurs ».

A = $\frac{1\cdot 3}{1\cdot 8}$ ⟵ On simplifie la fraction (par 3 et par 2)

A = $\frac{3}{8}$ ⟵ On obtient la fraction finale irréductible.

Définition

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.
Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

Remarque : l'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même.

Théorème

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction non nulle ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), alors son inverse est la fraction $\frac{b}{a}$.

Exemple : Donner les inverses des nombres 3 et $\frac{1}{3}$ et $-\frac{7}{3}$.

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$; l'inverse de $\frac{1}{3}$ est 3 ; l'inverse de $-\frac{7}{3}$ est $\frac{1}{-\frac{7}{3}} = -\frac{3}{7}$

Définition (division des fractions)

Diviser par une fraction non nulle, c'est multiplier par son inverse.

Exemple: calculer A = $\frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$ et donner le résultat en simplifiant le plus possible.

A = $+\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$ ⟵ On s'occupe d'abord du signe : le résultat est positif car il y a un nombre pair de facteurs négatifs.

A = $\frac{8}{7} \cdot \frac{3}{5}$ ⟵ On multiplie par l'inverse de la deuxième fraction.

A = $\frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$ ⟵ On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en simplifiant si possible.

Définition

Une fraction est i**rréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Définition

Amplifier une fraction, c'est multiplier le numérateur et le dénominateur par un même entier non nul.
Simplifier une fraction, c'est diviser le numérateur et le dénominateur par un même diviseur commun.

Théorème

Quand on amplifie ou simplifie une fraction, on obtient une nouvelle fraction égale à celle de départ.

A savoir 4 Proportions

Résoudre une situation de proportionnalité

Dans une situation de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est le quatrième nombre (x) calculé à partir de trois autres nombres déjà connus (a, b et c).
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

a	c
b	x ?

a, b et c sont différents de zéro.

Donc on a : $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$.

Et donc : $a \cdot x = b \cdot c$ (égalité des produits en croix).

Exemple : Calculer le prix x de trois baguettes grâce au tableau de proportionnalité suivant:

Le prix du pain est proportionnel au nombre de baguettes achetées. L'égalité des produits en croix donne : $5 \cdot x = 4,25 \cdot 3$

Donc : $x = \frac{4,25 \cdot 3}{5} = \frac{12,75}{5} = 2,55$ chf

Nombre de baguettes	5	3
Prix en chf	4,25	x ?

Caractériser graphiquement la proportionnalité

Si on représente, dans un repère, une situation de proportionnalité, alors on obtient des points alignés avec l'origine du repère.

Exemple: Le périmètre p d'un carré est proportionnel à son côté c puisqu'on a $p = 4c$.

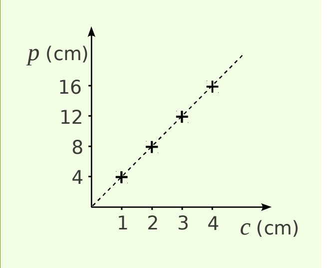
Représenter graphiquement le périmètre en fonction du côté.

1. On **choisit** des valeurs pour le côté c.
2. On **calcule** les valeurs correspondantes du périmètre p.

côté c (en cm)	1	2	3	4
périmètre p (en cm)	4	8	12	16

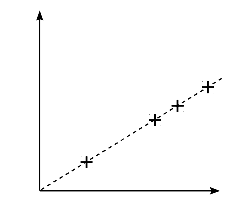
×4

3. On **place** les points dans un repère comme ci-contre.

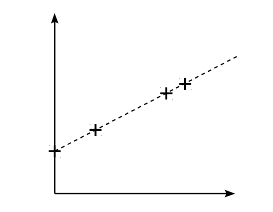


Réciproquement, si une situation est représentée par des points alignés avec l'origine du repère, alors c'est une **situation de proportionnalité**.

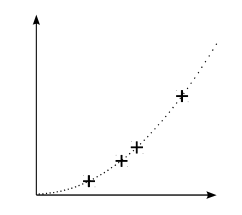
Exemple: Ces graphiques représentent-ils des situations de proportionnalité ? Justifier.



Oui, car les points sont alignés avec l'origine du repère.



Non, car les points sont alignés, mais pas avec l'origine du repère.



Non, car les points ne sont pas alignés.

Utiliser ou déterminer un pourcentage

Exemple : 25 filles et 20 garçons de deux classes de 2[e] ont effectué un devoir commun. 60 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne. Calculer le pourcentage d'élèves qui ont obtenu la moyenne dans l'ensemble de ces deux classes.

1. On calcule le nombre de filles qui ont obtenu la moyenne :

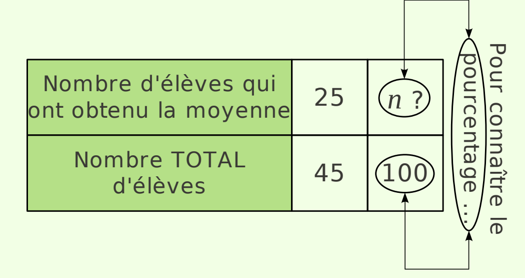
$$\frac{60}{100} \cdot 25 \text{ filles} = \frac{60 \cdot 25}{100} \text{ filles} = 15 \text{ filles}.$$

2. On calcule le nombre de garçons qui ont obtenu la moyenne :

$$\frac{50}{100} \cdot 20 \text{ garçons} = \frac{50 \cdot 20}{100} \text{ garçons} = 10 \text{ garçons}.$$

3. On calcule le nombre total d'élèves dans les deux classes : 25 + 20 = 45 élèves.

On calcule le nombre d'élèves ayant eu la moyenne : 15 + 10 = 25 élèves.



Nombre d'élèves qui ont obtenu la moyenne	25	n ?
Nombre TOTAL d'élèves	45	100

L'égalité des produits en croix donne:

$45n = 25 \times 100$

Donc : $n = 25 \times 100 \div 45$

$n \approx 56$

Donc environ 56 % des élèves des deux classes ont obtenu la moyenne.

Utiliser les formules de la vitesse

Si un mobile parcourt une **distance d** en un **temps t,** alors **la vitesse moyenne v de ce mobile est le quotient de d par t :** $v = \frac{d}{t}$ ou $d = vt$.

Exemple: sur un parcours de 60 km, la vitesse moyenne d'un cycliste est de 30 km/h à l'aller et de 20 km/h au retour. Calcule sa vitesse moyenne V sur le trajet aller-retour.

$d = d_1 + d_2$ = 60 km + 60 km = 120 km. ← On calcule la distance d aller-retour.

$d_1 = v_1 t_1$ donc $t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{60 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 2 \text{ h}$. ← On calcule la durée t_1 du trajet aller.

$d_2 = v_2 t_2$ donc $t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{60 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 3 \text{ h}$. ← On calcule la durée t_2 du trajet retour.

$t = t_1 + t_2$ = 3 h + 2 h = 5 h. ← On calcule la durée t de l'aller-retour.

$V = \frac{d}{t} = \frac{120 \text{ km}}{5 \text{ h}} = \frac{120}{5} \text{ km/h} = 24 \text{ km/h}.$ ← On calcule la vitesse moyenne V sur le trajet aller-retour.

Transformer les km/h en m/s

1 h = 3 600 s	1 km = 1 000 m

Exemple: convertir 54 km/h en m/s et 2,5 m/s en km/h.

54 km/h signifie que l'on parcourt...	2,5 m.s^{-1} signifie que l'on parcourt...
54 km en 1 h	2,5 m en 1 s
54 000 m en 1 h	0,002 5 km en 1 s
÷3600 → **15 m** en **1 s** ← ÷3600	×3600 → **9 km** en **1 h** ← ×3600
Donc : 54 km/h = 15 m/s.	Donc : 2,5 m.s^{-1} = 9 km.h^{-1}.

Plus de deux grandeurs proportionnelles

Si plus de deux grandeurs varient proportionnellement (ou de façon inversement proportionnelle), il faut veiller à ne les faire varier que deux par deux.

Exemple: trois vaches mangent cinq kilos d'herbe en 1 jour. Combien de kilos faut-il pour nourrir 10 vaches pendant 7 jours?

3 vaches, 5 kg, 1 j	Donnée
3 vaches, 35 kg, 7 j	Même nombre de vaches: 7 fois plus de temps, donc 7 fois plus kg
10 vaches, $\frac{10}{3}\cdot 35$ kg, 7 j	Même durée: 10/3 fois plus de vaches, donc 10/3 fois plus de kg
Réponse: env. 116,7 kg	$\frac{10}{3}\cdot 35 \simeq 116.7$

A savoir 5 Nombres rationnels

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre dont le **développement décimal** est soit fini, soit **infini périodique** à partir d'un certain rang. Ceci peut aussi s'exprimer ainsi: un **nombre rationnel** est formé de trois parties :

- une **partie entière** : un nombre entier relatif, situé avant la virgule
- une virgule
- une suite de chiffres après la virgule qui est soit finie, soit **infinie périodique** à partir d'un certain rang.

La différence entre le nombre rationnel et sa partie entière est appelée **partie fractionnaire**.

Exemples

- $-15 ; 2,3 ; 0,00001 ; 1,\overline{3} ; -98,23\overline{312}$ sont des nombres rationnels
- dans $-98,23\overline{312}$, -98 est la partie entière et $0,23\overline{312}$ la partie fractionnaire.
- $\pi ; \sqrt{2} ; 0,1234567891011121314\ldots$ ne sont pas des nombres rationnels

Théorème (relation entre fraction et nombre rationnel)

1 A tout nombre rationnel correspond une unique fraction irréductible
2 A toute fraction irréductible correspond un unique nombre rationnel

Remarque : on ne démontre pas formellement ce résultat.

Exemple 1: écrire $x=2,3\overline{4}$ sous forme de fraction irréductible.

$x=2,3\overline{4}$, donc $10x=23,\overline{4}$ et $100x=234,\overline{4}$ ← On trouve deux multiples de x pour lesquels la période commence juste après la virgule

$100x-10x=234,\overline{4}-23,\overline{4}$ ← On soustrait les deux nombres

$90x=211$ ← On simplifie des deux côtés

$x=\frac{211}{90}$ ← On trouve x; on simplifie si nécessaire

Exemple 2: Ecrire $x=\frac{121}{15}$ sous forme de nombre rationnel.

Algorithme d'Euclide

$121=8\cdot 15+1$, d'où $\frac{121}{15}=8+\frac{1}{15}$
on a déjà: $\frac{121}{15}=8,\ldots$
← On effectue la division euclidienne de 121 par 15: quotient=8, reste=1

$10=0\cdot 15+10$, d'où $\frac{10}{15}=0+\frac{10}{15}$
on a déjà: $\frac{121}{15}=8,0\ldots$
← On recommence en divisant 10 fois le reste par 15: quotient=0, reste=10

$100=6\cdot 15+10$, d'où $\frac{100}{15}=6+\frac{10}{15}$
on a déjà: $\frac{121}{15}=8,06\ldots$
← On recommence en divisant 10 fois le reste par 15: quotient=6, reste=10

$100=6\cdot 15+10$, d'où $\frac{100}{15}=6+\frac{10}{15}$
on a déjà: $\frac{121}{15}=8,066\ldots$
← On trouve un reste déjà obtenu précédemment, le processus va se répéter à l'infini: on a trouvé la période.

Résultat: $\frac{121}{15}=8,0\overline{6}$

Remarques

- A chaque étape, le reste est toujours supérieur ou égal à 0 et strictement inférieur à 15
- Pour une fraction quelconque, ce processus peut soit s'arrêter (dans le cas où on trouve un reste nul, ce qui donnera un développement décimal fini), soit être périodique à partir d'un certain rang (dès qu'on retombe sur un reste déjà obtenu précédemment, ce qui donnera un développement décimal infini périodique à partir d'un certain rang).
- On peut déduire de la remarque précédente que la longueur de la période est inférieure ou égale au dénominateur de la fraction de départ, puisque les restes possibles sont 0 ; 1 ; 2 ;...; r - 1 , soit r nombres différents. Après r+1 étapes, on est donc certain d'avoir soit terminé (avec un reste 0), soit retrouvé un reste déjà obtenu précédemment.

A savoir 6 Nombres réels

Théorème

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction

Définition

Un **nombre réel** est formé de trois parties :

- une **partie entière** : un nombre entier relatif, situé avant la virgule
- une virgule
- une suite quelconque de chiffres après la virgule

La différence entre le nombre réel et sa partie entière est appelée **partie fractionnaire**.

Remarque : la différence avec les nombres rationnels est donc que la suite de chiffres après la virgule peut se prolonger de façon non périodique sans jamais s'arrêter.

Définition

Un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est appelé **nombre irrationnel**.

Définition

π est le rapport constant entre la longueur d'un cercle (son périmètre) et son diamètre.

Remarque: π est un nombre irrationnel (la démonstration est difficile et a seulement été établie par Lambert au XVIIIe)

Définition

Il est majoritairement admis que si on trace une droite dans le plan, alors on peut associer à tout point de cette droite un nombre réel, et réciproquement à tout nombre réel un point de la droite. Cela signifie que "les nombres réels recouvrent exactement la droite". Une telle droite est alors appelée la **droite réelle**.

A savoir 7 Puissances

Définition « Puissance entière positive »

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul. Alors on définit: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n fois)
a est appelé la **base** et n **l'exposant** de l'expression a^n.

Remarques

- a^2 se lit « a (au) carré », en référence à l'aire d'un carré de côté a.
- a^3 se lit « a (au) cube », en référence au volume d'un cube d'arête a.

Définition « Puissance nulle »

Soit a un nombre réel non nul. Alors on définit: $a^0 = 1$

Remarque: 0^0 n'est pas défini

Définition « Puissance entière négative»

Soit a un nombre réel non nul et n un entier naturel non nul. Alors on définit: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Exemple: calculer $(-2)^{-3}$

On utilise les définitions des puissances et l'ordre des opérations: $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{(-8)}=-\frac{1}{8}$

Théorème« Propriétés des puissances »

Soit a un nombre réel non nul et n et m des entiers naturels non nuls, alors, sauf dans les cas du type 0^0 ou $\frac{...}{0}$, on a:

1 $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$

2 $(a^m)^n = a^{n \cdot m}$

3 $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^m$

Exemple: Comparer $\left(5^3\right)^2$, $5^{\left(3^2\right)}$, 5^{2^3} et 5^7

On ramène tous les nombres à une même base ou à un même exposant pour pouvoir les comparer facilement:
$\left(5^3\right)^2=5^{3 \cdot 2}=5^6$, $5^{\left(3^2\right)}=5^9$, $5^{2^3}=5^{\left(2^3\right)}=5^8$, donc $\left(5^3\right)^2 < 5^7 < 5^{2^3} < 5^{\left(3^2\right)}$

Écrire en notation scientifique

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10 (10 exclu), c'est à dire **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule,** et où n est un nombre **entier relatif**.
Le nombre a est appelé **mantisse**.

Exemple: Écrire le nombre A = 6 430 en notation scientifique.

A = **6 430**

A = 6,43 × **10^3** → On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique de A est donc **6,43** × **10^3**.

A savoir 8 Plus sur les racines carrées

Définition

La **racine carrée** d'un nombre positif ou nul est le nombre positif ou nul dont le carré est égal à ce nombre.

Notation

La racine carrée se note avec le symbole $\sqrt{\ }$, par exemple $\sqrt{12}$ pour la racine carrée de 12.

Exemples

$\sqrt{16}=4$, car $4\geq 0$ et $4^2=16$ **[et il est donc faux de dire que $\sqrt{16}=\pm 4$!]**

$\sqrt{-16}$ n'existe pas, car aucun nombre élevé au carré est égal à -16

Théorème « Propriétés des racines carrées»

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls et n un entier naturel non nul:

1 $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$

2 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

3 $\sqrt{a^n}=a^n$

4 Si $b>0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Simplifier une racine carrée

Exemple 1: simplifier $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ et $\sqrt{5}\cdot\sqrt{0,45}$

$\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{3\times 27}=\sqrt{81}=9$

$\sqrt{5}\times\sqrt{0,45}=\sqrt{5\times 0,45}=\sqrt{2,25}=1,5$

Exemple 2: écrire le nombre $C=\sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$C=\sqrt{16\times 2}$

$C=\sqrt{4^2\times 2}$ ← On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.

$C=\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}$

$C=4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ ← On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

Exemple 3: simplifie les nombres $A=\sqrt{\frac{36}{25}}$ et $B=\frac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}}$.

$A=\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}=\frac{6}{5}$

$B=\frac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}}=\sqrt{\frac{0,56}{0,08}}=\sqrt{\frac{0,56\times 100}{0,08\times 100}}=\sqrt{\frac{56}{8}}=\sqrt{7}$

Exemple 4: écrire $C=\sqrt{\frac{25}{7}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

$C=\sqrt{\frac{25}{7}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}}=\frac{5}{\sqrt{7}}$	→	On décompose la racine carrée du quotient afin de simplifier le numérateur.
$C=\frac{5\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$	→	On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$ puis on applique la définition d'une racine carrée.

Réduire une somme/différence de racines carrées

Exemple: réduire la somme $A=\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$.

$A=\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$	→	On remarque que $\sqrt{5}$ est un facteur commun aux trois termes de la somme.
$A=(1-2+7)\sqrt{5}$	→	On factorise par
$A=6\sqrt{5}$	→	On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exemple: écrire $B=2\sqrt{72}-7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers relatifs, d étant le plus petit possible.

$B=2\sqrt{36\times2}-7\sqrt{9\times2}$	→	On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.
$B=2\sqrt{36}\times\sqrt{2}-7\sqrt{9}\times\sqrt{2}$	→	On décompose la racine carrée de chacun des produits.
$B=2\times6\sqrt{2}-7\times3\sqrt{2}$	→	On applique la définition d'une racine carrée.
$B=12\sqrt{2}-21\sqrt{2}$	→	est un facteur commun aux deux termes.
$B=(12-21)\sqrt{2}$	→	On factorise par
$B=-9\sqrt{2}$	→	On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Rendre rationnel un dénominateur en « multipliant par le conjugué »

Exemple: **r**endre rationnel le dénominateur de $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ et simplifier au maximum

On **multiplie par le conjugué** et on utilise les propriétés des racines:

$$\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{18}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{18}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt{54}+\sqrt{9}-\sqrt{36}-\sqrt{6}=\sqrt{9\cdot6}+3-6-\sqrt{6}=3\sqrt{6}-3-\sqrt{6}=2\sqrt{6}-3$$

Exercices d'entraînement

Multiples, diviseurs

1 Déterminer ppcm{100124;10098}

2 Lors du tournage d'un film, le réalisateur dispose de 651 figurants habillés en noir et de 465 figurants habillés en rouge. Il doit former des équipes constituées de figurants vêtus de rouge et de figurants vêtus de noir de la manière suivante : dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en rouge ; dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants habillés en noir ; le nombre d'équipes doit être maximal. Quelle sera la composition d'une équipe?

3 Parmi les nombres : 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indiquer ceux qui sont divisibles :

a. par 2

b. par 3

c. par 5

d. par 9

4 Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre simultanément puis un second six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifier.

5 Démontrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4. A-t-on la même propriété pour la somme de deux entiers pairs consécutifs ?

6 Trouver les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5 dont la somme des chiffres est 21.

7 Soit n un entier naturel.

a. Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

b. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

c. Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

8 Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

a. 63 par 4

b. 218 par 12

c. 3245 par 135

d. 32 par 50

9 Effectuer la division euclidienne de 934856 par 30464.

10 Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours. Combien cela représente-t-il de semaines ? S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

11 Trouver tous les nombres pour lesquels le quotient et le reste sont égaux dans la division euclidienne par 5.

Fractions

12 Ecrire sous forme de nombre rationnel:

a. $\frac{1}{45}$

b. $\frac{0}{56}$

c. $\frac{2}{9}$

d. $\frac{34}{8}$

e. $\frac{31}{7}$

f. $\frac{453}{8}$

13 Ecrire sous forme de fraction irréductible:

a. $0,375$

b. $1,\overline{2}$

c. $0,\overline{027}$

d. $0,\overline{65}$

e. $0,24\overline{9}$

f. $10,0\overline{13}$

14 Exprimer en heures et fractions d'heures:

a. 30 secondes 18 minutes

b. 30 minutes 1 seconde

Proportions

15 A la halle aux fruits, le kilogramme de clémentines est vendu 2,20 chf. Représenter graphiquement le prix à payer en fonction de la masse de clémentines achetées (prendre 1 cm pour 1 kg en abscisse et 1 cm pour 1 chf en ordonnée).

16 Pour faire un gâteau, je fais fondre une tablette de 100 g de chocolat dont la teneur en cacao est de 70 % avec une tablette de 200 g dont la teneur en cacao est de 85 %.

a. Calculer la masse de cacao contenue dans le mélange ainsi constitué.

b. Quel est le pourcentage de cacao dans ce mélange ?

17 Un TGV a parcouru 540 km à 240 km/h de moyenne. Calculer la durée du trajet.

18 Vrai ou faux ? Les deux offres publicitaires ci-dessous sont équivalentes :

a. A : BOUM SUR LES PRIX : 20% de réduction

b. B : OFFRE SPECIALE : 25% de produit en plus

19 Trois maçons montent un mur de 600 briques en une heure. En combien de temps, avec une efficacité identique, cinq maçons monteront-ils un mur de 1200 briques ?

Rationnels

20 Les conjectures suivantes sont-elles vraies? Justifier.

a. Le produit de deux nombres rationnels est-il nécessairement rationnel ?

b. L'inverse d'un nombre rationnel est-il nécessairement rationnel ?

21 Déterminer le nombre rationnel x tel que $x=\frac{256}{225}$

22 Déterminer la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{a}{b}=1,2\overline{23}$

Réels

23 Représenter dans un diagramme de Venn les nombres suivants :

$$-23454\,;-\frac{13}{9}\,;2^{2008}\,;123,\overline{009}\,;\frac{0}{4}\,;\frac{0}{0}\,;\sqrt{2}\,;2,\overline{9}$$

Puissances

24 Simplifier au maximum (a un nombre réel non nul):

a. $\frac{1}{a^{-1}}$ **b.** $(-a)^4$ **c.** $-a^4$ **d.** $(-a)^3$ **e.** $-a^3$ **f.** $(-a)^{-2}$ **g.** $-a^{-2}$ **h.** $(-a)^{-3}$ **i.** $-a^{-3}$

25 Simplifier le plus possible en donnant une réponse sous forme de fraction irréductible:

a. $\frac{18^3\cdot 14^2}{42^3\cdot 3^4}$

b. $2^2\cdot 2^3\cdot 2^5$

c. $\frac{5^7\cdot 2^7}{10000}$

d. $\frac{64\cdot 2^5}{4^5}$

e. $-1\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{5}\cdot(-1)$

26 Simplifier au maximum les puissances dans les expressions suivantes:

a. $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$

b. $\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^a\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^b}{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^b\right)^a}$

c. $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$

d. $(2x^2y^{-5})(6x^{-1}y)(\frac{1}{3}x^{-1}y^3)$

e. $\left(\frac{2r^3s}{s^5}\right)^3\cdot\left(\frac{3s^2s}{r^4}\right)^2$

27 Simplifier le plus possible et de sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif dans la réponse(a et b des réels, b non nul) :

$$\frac{(b^4)^{-3}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-5}}{(b^3\cdot b^2)^{-1}\cdot(b^5)^3}\cdot a^8$$

28 Soit $a=0{,}0004$.
Ecrire en notation scientifique:

a. a **b.** a^4 **c.** a^{-3} **d.** a^{-1} **e.** 10^8a^{-6} **f.** $10^{2597}a^{650}$

29 Ecrire en puissances de 10 et simplifier:

a. $0{,}07\cdot 3000\cdot 0{,}002\cdot 0{,}1\cdot 50$

b. $0{,}000025\cdot 20000\cdot 0{,}0003\cdot 0{,}004\cdot 7000000$

30 Classer par ordre croissant:

$$10^{10^{10^{10}}}\,;10^{10^{11}}\,;10^{100^{10}}\,;100000^{100}\,;1^{100000^{100000}}$$

Racines

31 Calculer lorsque cela est possible; donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\sqrt{-36}$ **b.** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ **c.** $\sqrt{25-16}$ **d.** $\sqrt{0{,}\overline{1}}$

32 En utilisant des décompositions en produits de facteurs premiers, extraire les racines carrées suivantes:

a. $\sqrt{784}$ **b.** $\sqrt{7056}$ **c.** $\sqrt{9801}$ **d.** $\sqrt{12321}$

33 Transformer $\frac{4}{\sqrt{8}}$ pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » puis simplifier au maximum.

34 Transformer $\frac{-1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » puis simplifier au maximum.

35 Simplifier au maximum $\frac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}$.

36 Vrai ou faux? Justifier.

a. $\sqrt{7+3}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

b. $\sqrt{\frac{32}{4}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{4}}$

c. $\sqrt{\frac{-9}{-4}}=\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}$

37 Classer par ordre croissant (a un réel strictement positif):

$a, \frac{1}{a}, \sqrt{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}, a^2, \frac{1}{a^2}, a^3, \frac{1}{a^3}$

Calculatrice

38 Effectuer les calculs suivants avec la calculatrice. Donner un résultat arrondi au millième:

a. $\frac{(-3211,08-432,44)\cdot(61,7)}{1,12\cdot(-0,56)}$

b. $\frac{-93,1}{-12,345+905,78}$

39 On considère le nombre :

$$F=\sqrt{10^{16}+4\cdot10^{-16}-(10^8-2\cdot10-8)^2}$$

a. Le calculer à l'aide de la calculatrice.

b. Développer à l'aide d'une identité remarquable le nombre $(10^8-2\cdot10^{-8})^2$

c. En utilisant le résultat du b. et sans utiliser la calculatrice, calculer F.

d. Comparer avec le résultat du a. et conclure.

40 Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre $D=1234567899^2-1234567898^2$

a. Que pensez-vous du résultat ?

b. Sans calculatrice, calculer le nombre D à l'aide de l'identité remarquable « différence de deux carrés » $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

c. Que peut-on déduire des calculs précédents ?

41 Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre :

$E=123456789^2-123456787\cdot123456791$

a. Poser $x=123456789$ et exprimer E en fonction de x

b. Développer et réduire l'expression trouvée en **a.**

c. Que peut-on déduire des calculs précédents ?

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

42 *Nombres parfaits*

a. Écrire la liste de tous les diviseurs de 6.

b. Calculer la somme de tous ces diviseurs à l'exception de 6.

c. Que remarque-t-on?
On appelle **nombre parfait** tout entier qui a cette particularité.

d. Vérifier que 496 est un nombre parfait.

e. Trouver tous les nombres parfaits compris entre 20 et 30.

43 Nombres divisibles par 7

a. 35 et 6300 sont-ils divisibles par 7? Justifier.

b. En utilisant la question **a.**, démontrer que 6335 est divisible par 7.

c. Démontrer dans le cas général que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x+y$ est divisible par 7. Enoncer cette conjecture sous forme si...alors... et identifier clairement hypothèses et conclusions.

d. La réciproque est-elle vraie? Justifier.

e. Démontrer le même résultat qu'en b. en utilisant un critère de divisibilité par 7.

f. En écrivant le nombre 6349147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6349147 est un multiple de 7.

g. Écrire un nombre entier de 15 chiffres qui soit divisible par 7.

44 Combien peut-on trouver d'entiers naturels inférieurs à 1000 dont le reste est 12 dans la division euclidienne par 25 ?

45 *Multiples de 30*

a. Démontrer que si un entier est multiple de 30 alors il est aussi multiple de 3 et de 5.

b. La réciproque est-t-elle vraie ?

46 Ecrire sous forme de fraction irréductible:

a. -2,455

b. 0,2324

c. $1,\overline{3}$

d. $1,2\overline{3}$

e. $-1,234\overline{343}$

47 Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible:

a. $1.1\overline{3}+4,\overline{7}$

b. $0.\overline{75}+0.\overline{26}$

c. $7\cdot 0.\overline{16}$

d. $0.\overline{45}\cdot 0.\overline{3}$

e. $(1.8\overline{5})^2$

48 "Il était une fois un honorable caravanier de Boukhara qui élevait ses trois fils dans un esprit empreint à la fois de rigueur et de tolérance. Lors d'une violente tempête de sable dans le désert du Kyzylkoum, il mourut d'épuisement non sans avoir eu le temps de rédiger son testament. Les rares rescapés de cet événement,une fois de retour au caravansérail, remirent ce testament aux trois fils affligés. En plus des legs obligatoires fixés par la loi, ils reçurent dix-sept chameaux. Mais à ce propos, les directives paternelles paraissaient très précises :

"Vous partagerez les chameaux entre vous trois : au plus vieux la moitié, au deuxième par l'âge le tiers, au plus jeune le neuvième".

Mais très rapidement les fils réalisèrent l'impossibilité du partage. Comme à l'accoutumée, en fin d'après-midi, ils se rendirent à la maison de thé et demandèrent conseil. Les réponses fusèrent :

"Vendez les chameaux et partagez-vous l'argent!", "Le testament est nul et non avenu, ses dispositions sont inexécutables.", "Vous devez rester collectivement propriétaires du troupeau!", "Ce testament pose un problème insoluble!", "Faites le partage qui se rapproche le plus des volontés de votre père!"," Donnez donc les chameaux à plus pauvre que vous!".

A la tombée du jour, la discussion, interminable et oiseuse, n'avait toujours pas apporté une solution satisfaisante, les trois frères désirant avant tout respecter le plus scrupuleusement possible les indications de leur père. C'est alors qu'apparut, à califourchon sur son âne, Nasreddin Affandi, l'homme considéré comme le plus sage de tout le Khworezm. Tous estimèrent qu'il serait bon de s'en remettre à son jugement. On lui demanda donc son avis sur l'affaire. Il réfléchit longuement, tout en caressant sa belle barbe frisée. Son âne, impatient, se mit à braire. C'est alors que Nasreddin prit la parole, en s'adressant aux trois héritiers :

"Je ne possède qu'un seul chameau, mais je l'ajouterai volontiers au dix-sept qui vous reviennent. Toi, l'aîné, tu en recevras la moitié, soit neuf chameaux. Toi, le deuxième, tu en prendras le tiers, ce qui fait six chameaux. A toi, le plus jeune,reviendra un neuvième du tout, soit deux chameaux. Chacun d'entre aura donc reçu plus qu'il n'en espérait et si je compte bien, cela fait dix-sept. Le chameau restant, qui n'est autre le mien, que je le reprendrai."

Assénant quelques rapides coups de talons dans les flancs de son bourricot, il disparut bien avant que tous les auditeurs eurent apprécié la sagesse de ses paroles ..."

Source:
Algèbre mode d'emploi, G Charrière, Ed. LEP

Expliquer cette apparente contradiction.

49 Le taux de change du jour est de 1 euro pour 1,675 chf. Combien faut-il d'euros pour obtenir 2000 chf ?

50 En France, la vitesse maximale autorisée sur autoroute est 130 km/h. Convertir cette vitesse en m/s.

51 Exprimer la vitesse de chaque planète sur leur orbite en m/s et en km/h.Le tableau suivant donne la longueur de l'orbite de quatre planètes de notre système autour du Soleil (en km) ainsi que le nombre de jours qu'elles mettent pour parcourir cette orbite.

Planète	Orbite en km	Révolution en jours
Mercure	$3,6\times 10^8$	88
Terre	$9,2\times 10^8$	365
Mars	$1,4\times 10^9$	687
Uranus	$1,8\times 10^{10}$	30 708

a. Exprimer la vitesse de chaque planète sur leur orbite en m/s et en km/h.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

42 *Nombres parfaits*

a. 1,2,3 et 6.

b. 6.

c. Cette somme est égale au nombre initial

d. 1+2+4+8+16+31+62+124+248=496

e. 28 est le seul parfait entre 20 et 30.

43 Nombres divisibles par 7

a. $35=5\cdot 7$ et $6300=900\cdot 7$

b. $6335=6300+35=900\cdot 7+5\cdot 7=7\cdot(5+900)$

c. Si [hyp] x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 , alors [concl] leur somme $x+y$ est divisible par 7.

Démonstration:

- x et y sont divisibles par 7 [par hyp]
- donc il existe k et m entiers tels que

  $x=7\cdot k$ et $y=7\cdot m$ [par déf de « multiple de 7 »]
- donc: $x+y=(7\cdot k)+(7\cdot m)=7\cdot(k+m)$
- donc x+y est bien multiple de 7 [par déf de « multiple de 7 »]

d. Fausse; contre-exemple: 3+7 est divisible par 7 mais ni 3 ni 7 le sont

e. Un nombre est divisible par 7 si et seulement si le résultat de la soustraction du **nombre de dizaines** (à ne pas confondre avec chiffre des dizaines) par le double du chiffre des unités est divisible par 7.

f.
$$633-2\cdot 5=623$$
$$62-2\cdot 3=56$$
$$56 \text{ est un multiple de } 7$$

g. $6349147=6300000+49000+140+7$

h. 777777777777777

44 40

45 *Multiples de 30*

a. Démonstration:

- x mult de 30 [par hyp]
- donc il existe k entier tel que

  $x=30\cdot k$ [par déf de « mult. de 30»]
- donc: $x=3\cdot(10\cdot k)=5\cdot(6\cdot k)$
- donc x est bien multiple de 3 et de 5 [par déf de « multiple de ...»]

b. Fausse; contre-exemple: 15 est divisible par 3 et 5 mais par par 30

46

a. $-\frac{491}{200}$

b. $\frac{581}{2500}$

c. $\frac{4}{3}$

d. $\frac{37}{30}$

e. $-\frac{1233109}{999000}$

47

a. $\frac{532}{90}$

b. $\frac{101}{99}$

c. $\frac{112}{99}$

d. $\frac{5}{33}$

e. $\frac{27889}{8100}$

48 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$

49 $\simeq 1194,03$ euros

50 $\simeq 36.1$ m/s.

51

Mercure	$\simeq 170454\,km/h$	$\simeq 47388\,m/s$
Terre	$\simeq 105022\,km/h$	$\simeq 29173\,m/s$
Mars	$\simeq 84610\,km/h$	$\simeq 23586\,m/s$
Uranus	$\simeq 24423\,km/h$	$\simeq 6784\,m/s$

52 *Un peu d'histoire*

Des fouilles archéologiques, entreprises à partir du milieu du XIXe siècle en Mésopotamie, ont livré plus de 500 000 tablettes d'argile marquées de signes cunéiforme.

Environ 300 d'entre elles concernent les mathématiques et relèvent,en majorité, de la période paléo-babylonienne, c'est-a-dire sont contemporaines de la dynastie d'Hammourapi, vers 1700 av.J.-C.

L'étude de ces documents permet d'apprécier les connaissances mathématiques des habitants du Croissant fertile. Nous avons déjà rencontré une telle tablette lors de l'étude du système de numération babylonien en base 60 et des triplets "pythagoriciens". Sur une autre petite tablette qui fait actuellement partie de la Yale Babylonian Collection sous la cote YBC 7289, on voit tracé un carré avec ses deux diagonales:



Source: http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/ybc/ybc.html

Sur le coté on peut peut traduire et trouver le nombre 30 et sur une diagonale les nombres 1, 24, 51,10 et 42, 25, 35.

a. Interpréter ces nombres en base 10.

On constate donc que les géomètres babyloniens - qui nous l'avons déjà vu étaient familiers avec le théorème de Pythagore plus de mille ans avant Pythagore- savaient évaluer la racine carrée de 2 avec une précision remarquable. En effet, l'approximation 1 ; 24,51,10 correspondant à 1,414212963 en notation décimale ; la précision est de l'ordre du millionième !

b. Vérifier ce calcul.

Ce problème du calcul de la diagonale du carré va être à l'origine de la première grande crise de l'histoire des mathématiques, à l'époque de Pythagore précisément. La mathématique grecque à ses débuts est inséparablement liée a des spéculations, partie scientifiques, partie philosophiques et mystiques, sur les proportions, les similitudes et les rapports, en particulier les “rapports simples” (exprimables par des fractions à petits numérateur et dénominateur) ; et ce fut l'une des tendances caractéristiques de l'école pythagoricienne de prétendre tout expliquer par le nombre entier et les rapports d'entiers. Mais ce fut l'école pythagoricienne justement,qui découvrit l'incommensurabilité du coté du carré avec sa diagonale. Ne supportant pas l'idée qu'il pouvait exister, dans l'Univers, certaines choses inexprimables par des nombres entiers ou des fractions, ils s'efforcèrent de tenir cette découverte secrète, mais cela ne fut pas possible longtemps. Un de leurs élèves, un certain Hippasos de Metaponte révéla publiquement l'existence de ce nouveau type de nombres, les irrationnels. Cette révélation fut l'une des causes de la fin de l'école pythagoricienne et, dit-on, de la mort mysterieuse, par noyade, d'Hippasos.

Plus tard, il fut démontré que tout nombre entier est soit un carré parfait, soitle carré d'un nombre irrationnel.Au XIXe siècle enfin, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845 - 1918),créateur de la célèbre théorie des ensembles, démontra qu'il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Ses étonnantes découvertes dans le domaine des ensembles infinis soulevèrent de grandes controverses.

Léopold Kronecker, son maître et l'un de ses adversaires les plus acharnés, le traita de corrupteur de la jeunesse, alors que David Hilbert, l'un de ses plus fidèles partisans, écrivait : « Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser »

Source (base modifiée par jmd) : Charrière, "Algèbre mode d'emploi", LEP

53 *Origine du symbole « racine carrée »*

Source: http://www.math93.com/racine.htm

R est la première utilisation d'un symbole pour représenter la racine carrée. On la trouve dans un ouvrage de Leonardo de Pise, « Geometriae de Practica » en 1220.

Nicolas Chuquet (XVe siècle) pratiquait déjà dans "Triparty en la science des nombres" (1484) (le plus ancien traité d'algèbre écrit en français) la notation par exposant. Pour noter par exemple √(35 - √15) Nicolas Chuquet écrit : RU 35 m̃ R 15, où R désigne la racine carrée, le U de RU signifiant qu'il s'agit d'une racine carrée englobant tout ce qui suit. Dans cet ouvrage, la notation des puissances par exposant est très proche de la nôtre et les radicaux sont notés R.

Le symbole radical apparaît la première fois en 1525 dans la « Matrice Coss » par Christoff Rudolff (1499-1545). Il employe √ pour les racines carrées. Il est l'auteur du premier manuel d'algèbre en langue allemande.

Certains avancent que l'origine du symbole radical moderne vient d'une déformation de R, puis r, la première lettre dans du latin « radix » (« racine », « base », « source », « fondement »). C'est l'opinion de Leonhard Euler dans ses « Differentialis de calculi d'Institutiones » (1775). Cependant, Florian Cajori, auteur d'une histoire des notations mathématiques, n'en est pas convaincu.

En 1637 DESCARTES utilise √, ajoutant la barre en haut, dans sa « Géometrie »:

8. Notations cossiques

Christoph Rudolff introduit en 1525 la notation √ pour la racine carrée, ∛∛ pour la racine cubique et ∜ pour la racine quatrième.

M. Stifel adopte √z pour désigner $\sqrt{\ }$, puis plus tard il écrit $\sqrt{\ }$
√& pour désigner $\sqrt[3]{\ }$
√zz pour désigner $\sqrt[4]{\ }$

Il écrit AA pour x^2
AAA pour x^3.

Pendant la Renaissance, l'école allemande, qui prend le nom de « La Coss » - les termes utilisés pour désigner l'inconnue par les Arabes signifient chose et racine: cosa, en italien; coss, en allemand - va s'efforcer d'élaborer une notation commode et introduit des abréviations de rex, de radix, de causa (nom de l'inconnue au Moyen Age chrétien), de census (carré de l'inconnue), ... dans les formules ; ce que l'on appelle les caractères cossiques.

Albert Girard (1595-1632) introduit la notation racine cubique 3√ .

Selon Cajori, la première personne pour qui adopte la notation de Girard était Michel Rolle (1652-1719) en 1690 dans le d Algèbre de Traité.

Voici un autre exemple de notations utilisées par Gérolamo CARDAN (Pavie, 1501 - Rome, 1576), tiré de son ouvrage « Ars Magna » (1545):

9. Notation de Cardan (Ars magna)

Cardan écrit l'égalité :

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

sous la forme :

5 p : Rm : 15,
5 m : Rm : 15,
25 m : m : 15qd est 40.

Il note $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ sous la forme R.V.7p : R14.
Le signe V indique que tout ce qui suit est sous le signe radical.

Bilan

"Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'oeuvre de l'homme"

Léopold Kronecker, mathématicien allemand (1823-1891)

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

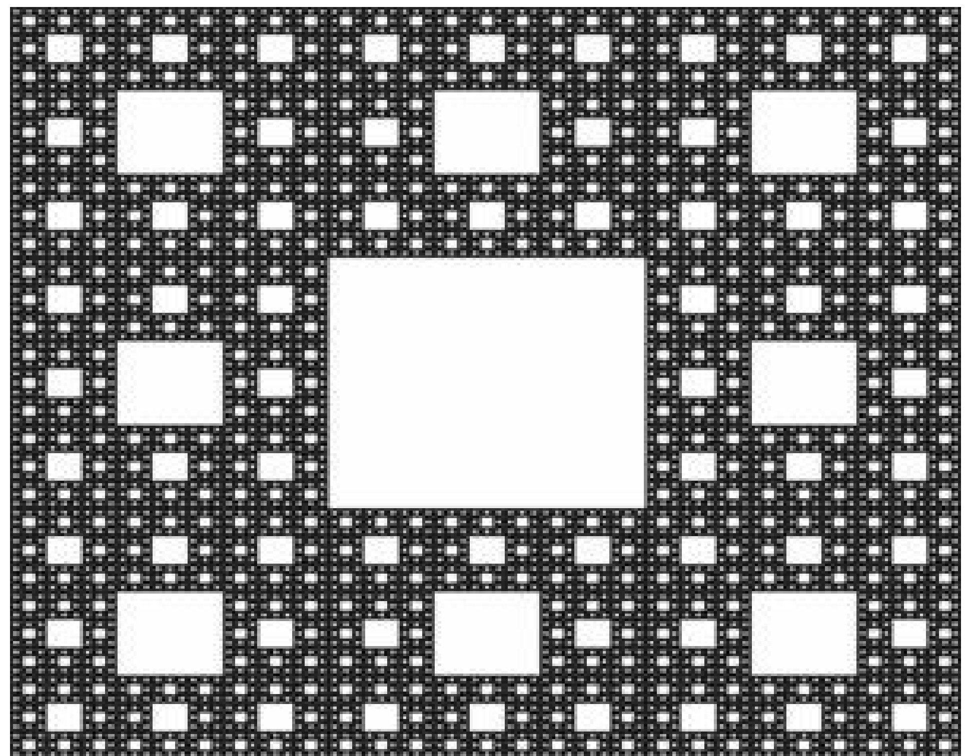
- ✔ ppcm, pgcd, division euclidienne, quotient, reste
- ✔ différence entre un problème à deux données proportionnelles et un problème dans lequel plus de données sont reliées proportionnellement
- ✔ fractions, numérateur, dénominateur, amplifier, simplifier
- ✔ nombre rationnel, période; la longueur d'une période est toujours finie mais peut être très grande
- ✔ différence et relation entre fraction et nombre rationnel
- ✔ théorème: quand on associe un nombre rationnel à une fraction, la période est forcément finie ou infinie périodique
- ✔ puissances entière positive, nulle et négative : définitions, théorèmes, calculs à la main et avec calculatrice
- ✔ racine carrée d'un nombre: définition précise (en particulier savoir et si possible avoir compris pourquoi la racine carrée d'un nombre n'est pas un ensemble de deux valeurs (opposées), mais seulement la valeur positive)
- ✔ il existe des nombres non rationnels, par exemple racine de 2
- ✔ relation entre nombres entiers naturels, entiers relatifs, nombre rationnels et nombres réels
- ✔ Pi : définition
- ✔ avoir pris conscience qu'un problème peut être résolu de différentes façons : calcul à la main, calcul approché ou estimé et calculatrice
- ✔ comprendre la différence entre un résultat exact et un résultat approché; en maths, on donne sauf contre indication le résultat exact quand cela est possible
- ✔ savoir d'où viennent les "règles" qu'on utilise
    - ✔ savoir les utiliser efficacement
    - ✔ les comprendre (démonstration dans certains cas, illustration dans d'autres)
    - ✔ connaître leur statut : définition, axiome, théorème
- ✔ les résultats fournis par la calculatrice ne sont pas forcément exacts; ils peuvent être même franchement faux; toute calculatrice (et tout ordinateur) a en effet des limites quant à la précision des calculs qu'elle peut effectuer; comprendre la différence entre nombre saisi au clavier, représentation du nombre en mémoire et affichage du nombre sur l'écran de la calculatrice
- ✔ il existe différents outils de calcul (calcul à la main ou avec calculatrice, de tête ou posé, approché ou exact, ...); choisir le bon en fonction du problème donné!
- ✔ savoir interpréter un résultat

Savoirs-faire

- ✔ déterminer ppcm, pgcd, division euclidienne avec reste; savoir les utiliser à bon escient comme outil de résolution de problèmes
- ✔ résoudre des problèmes de proportions; savoir traiter des problèmes ou plus de deux données varient proportionnellement
- ✔ réduire en fraction en fraction irréductible, à la main et à la machine
- ✔ simplifier, amplifier une fraction; maîtriser les opérations sur les fractions
- ✔ associer un nombre rationnel à une fraction
- ✔ associer une fraction irréductible à un nombre rationnel
- ✔ puissances entière positive, nulle et négative : calculs à la main et avec calculatrice
- ✔ racine carrée
    - ✔ calculs à la main et avec calculatrice
    - ✔ simplifier une racine carrée
        - ✔ extraire les facteurs carrés
        - ✔ modifier l'écriture d'une expression qui contient une racine carrée au "dénominateur" pour qu'elle n'en ait plus qu'au "numérateur"
        - ✔ multiplier par le conjugué
    - ✔ énoncer et démontrer le théorème « racine de deux ne peut pas s'écrire comme une fraction »
- ✔ savoir choisir le bon outil entre calcul à la main ou avec calculatrice, de tête ou posé, approché ou exact, ...
- ✔ savoir utiliser correctement la calculatrice, en évitant les arrondis intermédiaires et en utilisant les mémoires
- ✔ employer une notation appropriée pour un résultat exact (=) ou un résultat approché (≅)
- ✔ savoir arrondir au 10e, 100e, ...

Bilan

Chapitre 5 - Ensembles



Le carré de Sierpinski

Problème

C'est dans une contrée reculée que se passe cette histoire. Le roi Dromadus premier, ruiné et déchu, possède comme unique fortune un fils, un chameau et 3000 dattes. Dans un ultime effort pour sauver son royaume, il confie à son fils l'expédition suivante : amener le chameau et les dattes à l'autre bout du royaume, c'est à dire à une distance de 1000km de l'endroit où nous nous trouvons. (C'est là que se trouve le seul acheteur intéressé).
Comme si cela ne suffisant pas, le chameau de Dromadus premier n'est pas vraiment bien portant et il ne peut porter plus de 1000 dattes sur le dos. Pire encore, il mange une datte par kilomètre parcouru. Comment faire alors pour amener le plus de dattes possible à destination ?

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Ecrire en langage mathématique

1. L'ensemble comprenant les nombres 2, 5, 11, -2 et 1

2. L'ensemble comprenant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12

3. L'ensemble comprenant les nombres entiers compris entre 22 et 2222

4. L'ensemble comprenant les nombres réels strictement compris entre 2 et 7

5. L'ensemble comprenant les nombres réels plus grands ou égaux à -2 et strictement inférieurs à 6

6. L'ensemble des entiers relatifs négatifs

7. L'ensemble des nombres rationnels positifs

Activité 2 Compléter par un symbole adéquat

1. ......

2. $\mathbb{N}$ ...... {1;2;3;4;...}= {0}

3. -33 ...... $\mathbb{N}$

4. {3;4;5;6;7} ...... {6;7;8;9} = {6;7}

5. {3;4;5;6;7} ...... {5;6;7;8;9} = {3;4}

Activité 3 Traduire en langage mathématique

1. « L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels »

2. « Moins trois quarts n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs »

3. « L'ensemble des réels inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$ »

Activité 4 Union, intersection et différence

Soient A et B les deux ensembles suivants : A={-5;3;4;6;8;9} et B= {2;3;4;8;10}.

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$

Activité 5 Intervalles réels

Soient A et B les deux ensembles suivants : A=]-5;3] et B= [0;5[

1. Représenter A et B sur une même droite réelle.

2. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$

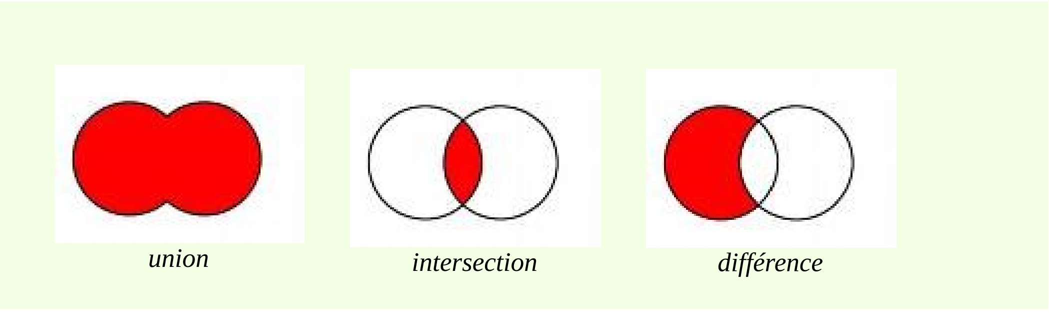
A savoir 1 Ensembles

Définitions et notations

Soit A et B deux ensembles:

- ☐ On note $x \in A$ pour indiquer que x est un élément de A
- ☐ On note $x \notin A$ pour indiquer que x n'est pas un élément de A
- ☐ $\emptyset$ représente l'**ensemble vide**
- ☐ On note $A \subseteq B$ pour indiquer que tous les éléments de A appartiennent aussi à B; il se lit « **A est inclus dans B** »
- ☐ $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B; il se lit « **A intersection B** »
- ☐ $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou non exclusif, c'est à dire que $A \cup B$ contient aussi les éléments qui sont dans A et dans B).; il se lit « **A union B** »
- ☐ $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B; il se lit « **A diff B** »

Illustration



Soit A un ensemble de nombres:

- ☐ $A^* = A \setminus \{0\}$ est l'ensemble de tous les éléments de A sauf zéro
- ☐ A_+ est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont positifs
- ☐ A_- est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont négatifs

Ensembles particuliers de nombres

- ☐ $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$ est **l'ensemble des entiers naturels**.
- ☐ $\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;3;...\}$ est **l'ensemble des entiers relatifs**.
- ☐ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$ est **l'ensemble des fractions**.
- ☐ $\mathbb{Q} = \{x |$ le développement décimal de x est soit fini, soit infini périodique$\}$ est **l'ensemble des nombres rationnels**.
- ☐ On note $\mathbb{R}$ **l'ensemble des nombres réels.**

Exemples

$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$

$\mathbb{Z}_- = \{...;-3;-2;-1;0\}$

$\mathbb{Z}_-^* = \{...;-3;-2;-1\}$

A savoir 2 $< \; > \; \leq \; \geq$

Soit a et b deux nombres réels:

☐ $0 < a$, lu "zéro est strictement plus petit que a ", et $a > 0$, lu " a est strictement plus grand que zéro", signifient que a représente un nombre positif non nul

☐ $0 > a$, lu "zéro est strictement plus grand que a " et $a < 0$, lu " a est strictement plus petit que zéro" signifie que a représente un nombre négatif non nul

☐ $0 \leq a$, lu "zéro est plus petit ou égal à zéro" et $a \geq 0$, lu " a est est plus grand ou égal à zéro", signifient que a représente un nombre positif ou le nombre zéro

☐ $0 \geq a$, lu "zéro est plus grand ou égal à a ", et $a \leq 0$, lu " a est est plus petit ou égal à zéro", signifient que a représente un nombre négatif ou le nombre zéro

☐ $a < b$, lu " a est strictement plus petit que b ", et $b > a$, lu " b est strictement plus grand que a "signifient que $0 < (b-a)$

☐ $a \leq b$, lu " a est plus petit ou égal à b ", et $b \geq a$, lu " b est plus grand ou égal à a ",signifie que $0 \leq (b-a)$

A savoir 3 Intervalles réels

Soit a et b deux nombres réels:

☐ $[a;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$

☐ $]a;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$

☐ $]a;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x \leq b$

☐ $[a;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x < b$

☐ $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $x \leq b$

☐ $[a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x$

☐ $[-\infty;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres réels

A savoir 4 Représenter graphiquement un intervalle réel

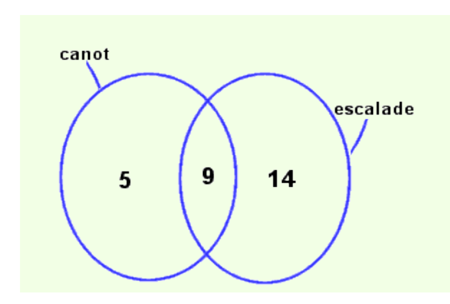
Un intervalle se représente graphiquement de la façon suivante; exemple pour [-3;5[

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

A savoir 5 Diagrammes de Venn

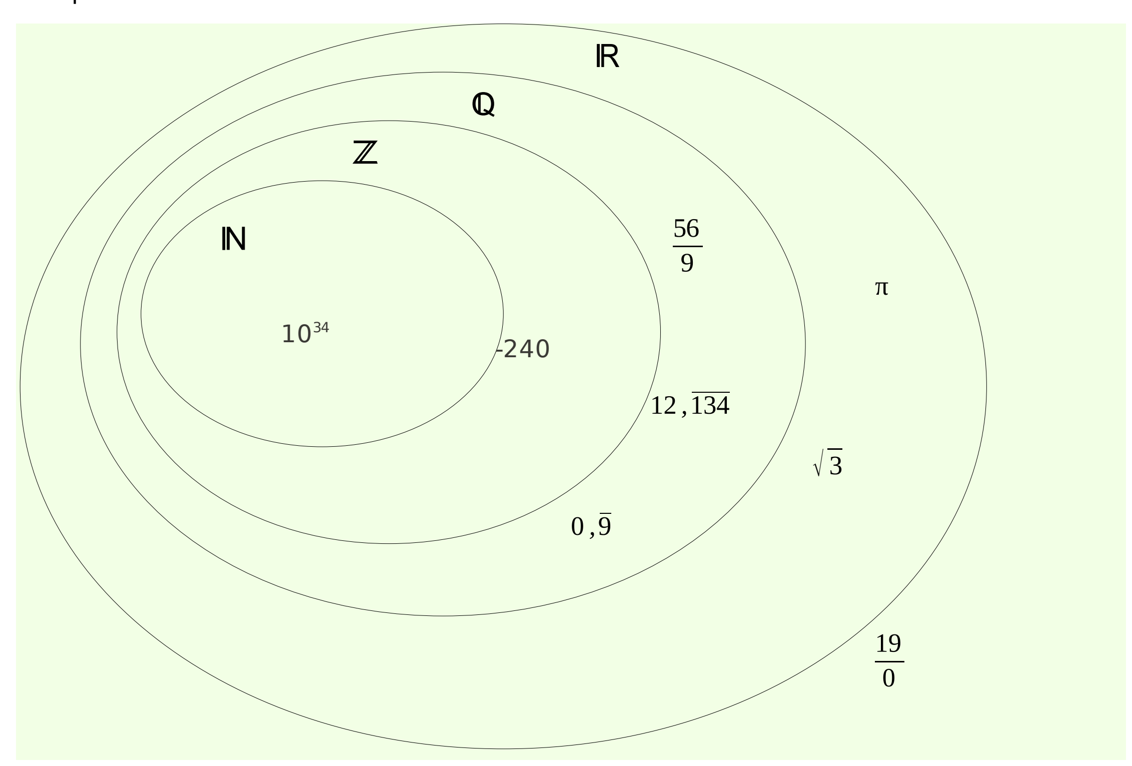
Un **diagramme de Venn** est une représentation d'un ou plusieurs ensembles par des lignes simples fermées dans lesquelles on représente les éléments en fonction de leurs appartenances.

Exemple 1



Dans l'exemple ci-contre, le diagramme de Venn représente un groupe de 28 jeunes qui ont participé à une journée de plein-air:
· 14 ont fait du canot (5 + 9)
· 5 ont fait seulement du canot
· 9 ont fait du canot et de l'escalade
· 23 ont fait de l'escalade (14 + 9)
· 14 ont fait seulement de l'escalade
· 28 jeunes ont participé aux activités
Source: *http://www.parcours.qc.ca/imaths/logique.html*

Exemple 2



1 Compléter par un symbole adéquat :

a. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{N}$

b. $\mathbb{Z} \setminus \{0\}=$ ......

c. -33,33 ...... $\mathbb{N}$

d. $[1;5[\cup]-3;2[$ = ...

e. $[1;5[\cap]-3;2[$ = ...

f. $[1;5[\setminus]-3;2[$ = ...

g. $]-3;2[\setminus[1;5[$ = ...

2 Représenter dans un diagramme de Venn les nombres suivants:

$$-240;\frac{56}{9};10^{34};12,\overline{134};\pi;\frac{19}{0};\sqrt{3};0,\overline{9}$$

3 Ecrire en langage mathématique:

a. L'ensemble comprenant les nombres -21;17 et 24

b. L'ensemble comprenant les nombres entiers de -12 à 13

c. L'ensemble comprenant les nombres réels strictement compris entre -4 et 45

d. L'ensemble comprenant les nombres réels plus grands ou égaux à 5 et strictement inférieurs à 46

4 Compléter par un symbole adéquat

a. $\mathbb{Z}$ ...... $\mathbb{Q}$

b. $\mathbb{Z}$...........$[2;8[$ ={2;3;4;5;6;7}

c. -33 ...... $\mathbb{Z}$

d. {3;4;5;6;7} ...... {6;7;8;9} = {3;4;...;9}

5 Traduire en langage mathématique

a. « L'ensemble des nombres naturels est inclu dans l'ensemble des nombres relatifs»

b. «Trois huitièmes n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs »

c. « L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$ »

6 Soient A et B les deux ensembles suivants: A={-3;-2;16;18;19} et B={-4;13;14;18;100}.
Déterminer:

a.

b. $A\cap B$

c. $B\setminus A$

d. $A\setminus B$

7 Soient A et B les deux ensembles suivants: A=]-15;12] et B= [-2;15[

a. Représenter A et B sur une même droite réelle.

b. Déterminer $A\cup B$, $A\cap B$ $B\setminus A$ et $A\setminus B$

8 On considère les ensembles suivants:

A={x I -5 < x ⩽ 2}

B={x I 0 ⩽ x < 5}

C={x I -3 < x < 3}

D={x I -3 ⩽ x ⩽ 3}

E={x I x < 2}

F={x I -5 <x}

G={x I -3 ⩽ x}

H={x I x ⩽ -3}

a. Donner leur écriture sous forme d'intervalle

b. Les représenter graphiquement.

c. Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $D\cap E$, $E\cap G$, $B\cup E$, $F\cup G$, $A\setminus C$, $D\setminus C$ et $G\setminus H$

9 Ecrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants:

a.
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

b.
-8-7-6-5-4-3-2-1 0 1 2 3 4 5

c.
-5-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

d.
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

10 * *Qu'est-ce que le « carré de Sierpinski » représenté en première page du chapitre?*

Réponses des exercices

1

a. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$

b. $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*$

c. $-33,33 \notin \mathbb{N}$

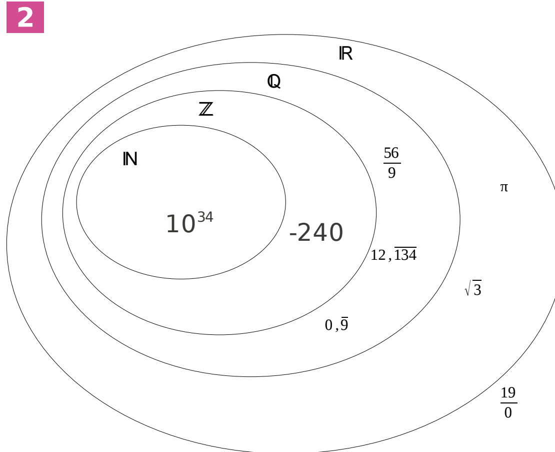
d. $]-3\,;5[$

e. $[1\,;2[$

f. $[2\,;5[$

g. $]-3\,;1[$

2



3

a. {-21;17;24}

b. {-12;-11;-10;...;13}

c. $]-4\,;45[$

d. $[5\,;46[$

4

a. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

b. $\mathbb{Z} \cap [2\,;8[= \{2;3;4;5;6;7\}$

c. $-33 \in \mathbb{Z}$

d. $\{3;4;5;6;7\} \cup \{6;7;8;9\} = \{3;4;...;9\}$

5

a. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

b. $\frac{3}{8} \notin \mathbb{Z}$

c. $]\sqrt{2}\,;\infty[$

6

a. {-4;-3;-2;13;14;16;18;19;100}

b. {-2;18}

c. {-4;13;14;100}

d. {-3;16;19}

7

a. -

b. $A \cup B =]-15\,;15[$; $A \cap B = [-2\,;12]$;

$B \setminus A =]12;15[$; $A \setminus B =]-15\,;-2[$

8

a. $A =]-5\,;2]$; $B = [0\,;5[$; $C =]-3\,;3[$;

$D = [-3\,;3]$; $E =]-\infty\,;2[$; $F =]-5\,;+\infty[$

$G = [-3\,;+\infty[$; $H =]-\infty\,;-3]$

b. -

c. $A \cap B = [0\,;2]$; $A \cup B =]5\,;5[$;

$D \cap E = [-3\,;2[$; $E \cap G = [-3\,;2[$;

$B \cup E =]-\infty\,;5[$; $F \cup G =]-5\,;+\infty[$;

$A \setminus C =]-5\,;-3]$; $D \setminus C = \{-3\,;3\}$;

$G \setminus H =]-3\,;+\infty[$

9

a. $[2\,;+\infty[$

b. $[-5\,;2]$

c. $]-\infty\,;2[$

d. $[-2\,;3[$

Bilan

"L'égalité n'est rien d'autre qu'un concept nécessaire aux mathématiques. Citez-moi une seule chose, sur cette terre, qui soit égale à une autre"

William P. Thurston

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ ensemble
- ✔ élément d'un ensemble
- ✔ inclusion entre ensembles
- ✔ opérations entre ensembles: union, intersection et différence
- ✔ ensemble vide
- ✔ ensembles de nombres : entiers naturels, relatifs, nombres rationnels, réels et leurs sous ensembles : entiers naturels strictement positifs, entiers relatifs négatifs,...
- ✔ quels ensembles sont inclus dans lesquels
- ✔ diagrammes de Venn
- ✔ inégalités
- ✔ intervalles réels (ouverts, fermés)

Savoirs-faire

- ✔ utiliser les bonnes notations ensemblistes
- ✔ effectuer des opérations entre ensembles : union, intersection, différence, inclusion et les représenter
- ✔ représenter des nombres dans des diagrammes de Venn
- ✔ représenter des intervalles réels sur la droite réelle
- ✔ traduire du français vers des notations ensemblistes et vice-versa

Chapitre 6 - Calcul littéral



Première page de « Kita al-moukhtasar fihisab al-jabr » ou « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison », publié en 825 par Al-khwarizmi

Problème

Le roi fit venir le premier prisonnier et lui expliqua que chacune de ses deux cellules contenait soit un tigre soit une princesse, et que toutes les combinaisons étaient possibles : il pouvait y avoir un tigre dans chaque cellule, une princesse dans chaque cellule, ou un tigre et une princesse. Le roi fit apposer les affiches suivantes sur les portes des deux cellules :

Affiche 1: Au moins une des deux cellules contient une princesse

Affiche 2: Il y a un tigre dans l'autre cellule

« Dois-je faire confiance à ce qui est écrit ? » demanda le prisonnier.

« Elles disent la vérité toutes les deux, on bien elles sont fausses toutes les deux » affirma le roi.

Quelle cellule doit choisir la prisonnier pour ne pas être dévoré?

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Développer les expressions

1. Avec des trous

Recopier et compléter les expressions à l'aide des identités remarquables:

a. $(.... + 4)^2 = x^2 + ... + ...$

b. $(y - ....)^2 = ... - 6y + ...$

c. $(.... + 6)(.... - ....) = k^2 - ....$

d. $(1 - ....)(.... + ...) = ... - 49x^2$

e. $(.... - 8)^2 = ... - 48x + ...$

f. $(.... + ...)(.... - 3) = 100y^2 - ....$

2. Calcul mental

a. Développer et réduire l'expression

$K = (x + 15)^2 - (x - 15)^2$.

b. En déduire le résultat de $1\,215^2 - 1185^2$.

c. Calculer mentalement 99^2.

d. Calculer mentalement 102^2.

e. Calculer mentalement $95 \cdot 105$.

f. Calculer mentalement 49^2.

g. Calculer mentalement $1001 \cdot 999$.

3. Ne rien oublier

Développer et réduire les expressions suivantes:

a. $A = (x^2 + 2)^2$

b. $B = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 - 8x^2$

c. $C = 2(3t - 5)^2 - 2(1 - 4t)^2$

d. $D = (1 + 4y)^2 - (2y + 3)^2 - (1 + 4y)(2y + 3)$

Activité 2 Factoriser

1. Une propriété connue

a. Recopier et compléter (k, a et b sont des nombres réels quelconques):

$k \cdot a + k \cdot b = ... \cdot (...... + ...)$; $k \cdot a - k \cdot b = ...$

b. Quelle est la propriété utilisée ? Quelle action réalise-t-on ? Comment appelle-t-on k ?

c. Pour chacune des expressions suivantes et en utilisant la question précédente, indiquer quelle expression ou quel nombre peut jouer le rôle de k, quelles expressions ou quels nombres peuvent jouer le rôle de a et de b:

$A = 7x + 14$ $B = 8y + 7y$; $C = 6ab + 5a$; $D = 6m - 9m^2$;

$E = (7x + 5)(3x + 2) + (7x + 5)(x - 9)$; $F = (x - 4)(3x - 5) - (8x + 7)(3x - 5)$.

d. Transformer chacune des expressions ci-dessus en un produit de facteurs.

2. Différences de deux carrés

Factoriser ces expressions:

a. A = $x^2 - 16$

b. B = $1 - y^2$

c. C = $100x^2 - 9$

d. D = $36 - 81z^2$

e. E = $4\pi^2 - 25$

f. F = $(t + 3)^2 - 16$

g. G = $(2x + 1)^2 - 25$

h. H = $(3i + 7)^2 - (i + 5)^2$

3. D'autres identités

Factoriser ces expressions:

a. A = $t^2 + 81 + 18t$

b. B = $4x^2 - 4xy + y^2$

c. C = $81 + 16y^2 - 72y$

d. D = $x^2 + 36 - 12x$

e. E = $\frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{3}pq + q^2$

f. F = $\pi^2 + 10\pi + 25$

Activité 3 Factoriser ou développer?

Soit x une variable réelle. On considère l'expression suivante : $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

a. L'expression $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$ est-elle une somme ou un produit?

b. $(x+3)(2-x)(2+x)$ et $(4-x^2)(x^2-9)$ sont les .... de l'expression [compléter].

c. L'expression $(4-x^2)(x^2-9)$ est-elle une somme ou un produit?

d. $4-x^2$ et (x^2-9) sont les .... de l'expression considérée en c.

e. Développer et réduire le plus possible $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

f. Factoriser le plus possible $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

Activité 4 Des trucs!

Factoriser le plus possible:

a. $3xy+6xy^2+1+3y$

b. $y^2+12x+36-4z^2+4x$

c. $3(x-y)z^2+9z^4(y-x)$

d. x^2+5+4x

A savoir 1 Développer une expression

Vocabulaire

Les **termes** sont les éléments qui constituent une somme.
Les **facteurs** sont les éléments qui constituent une produit.
Un **monôme** est une expression algébrique ne comportant qu'un seul terme et dont la(les) variable(s) sont à des puissances uniquement entières positives.
Dans un monôme à une variable, une fois celui-ci réduit le plus possible, son **degré** est l'exposant de la variable et son **coefficient** le facteur numérique.

Exemples 1:

Dans l'expression $E=(2x+3)(x-4)$, $(2x+3)$ et $(x-4)$ sont les facteurs.

Dans l'expression $F=2x+3$, $2x$ et 3 sont les termes.

Exemples 2:

$2x^3y^2z^6$, $\frac{-2x^{13}u^2}{5}$ et $\sqrt{2}t$ sont des monômes.

$2x^{-3}y^2z^6$, $\frac{-2x^{13}u^2}{y}$ et $\sqrt{2t}$ ne sont pas des monômes.

$2x^3$ est de degré 3 et de coefficient 2, $-2x^3(3x^{12})^2$ est de degré 27 et de coefficient -18, y est de degré 1 et de coefficient 1

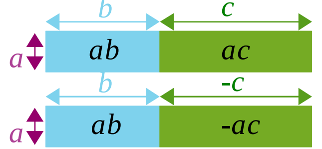
Remarque: une constante est dite de degré 0

Définitions

La **distributivité** est une propriété de la multiplication qui permet d'effectuer le produit d'un nombre et d'une somme : si a,b et c sont des variables réelles, alors

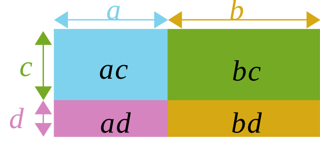
$$a(b+c)=ab+ac$$

$$a(b-c)=ab-ac$$



La **double distributivité** découle de cette première propriété et permet d'effectuer le produit de deux sommes : si a,b,c et d sont des variables réelles, alors

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$



Développer une expression algébrique, c'est la transformer en une **somme** de termes.
Réduire une expression algébrique, c'est l'écrire avec **le moins de termes** possibles.

Exemple: Développer et réduire l'expression $E=(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$

$E=(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$ ⟵ On commence par les multiplications (ordre des opérations)

$E=2x^2+3x-8x-12+4x^2-8x$ ⟵ On additionne les termes de mêmes degrés.

$E=6x^2-13x-12$

Exemple: La **forme développée** de $(x-1)(x^3+3x-2)$ est $x^4-x^3+3x^2-5x+2$.

A savoir 2 Identités remarquables

Théorème

Si a, b et $x \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Exemples

$(2x^3y - 3x^2y^4)(2x^3y + 3x^2y^4) = 4x^6y^2 - 9x^4y^8$

$(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$

A savoir 3 Factoriser

Factoriser une expression algébrique, c'est la transformer en **produit** de facteurs.

Exemple

$3x^3 + 6x^2$ se factorise en $3x^2(x+2)$

$3x^2$ et $(x+2)$ sont les **facteurs** de $3x^3 + 6x^2$

Remarque: $x(x-3)+4$ n'est pas une forme factorisée de $x^2 - 3x + 4$, car $x(x-3)$ et 4 ne constituent pas un produit, ce sont les termes d'une somme!

A savoir 4 Pourquoi factoriser?

L'intérêt de la factorisation est le suivant:

- connaissant les signes de a et b, on ne contrôle pas le signe de $a+b$ ou de $a-b$, par contre,grâce à la règle des signes, on contrôle celui de $a \cdot b$; il est donc souvent intéressant, lorsqu'on s'intéresse au signe d'une expression, que celle-ci soit factorisée
- lorsqu'on sait que $a+b=0$ ou $a-b=0$, on ne peut pas en déduire grand chose à propos des valeurs de a et b (hormis bien sûr qu'elles sont soit opposées, soit égales!); par contre, quand $a \cdot b = 0$, on est certain que soit $a=0$ soit $b=0$

Exemple

Si on souhaite trouver tous les x tels que $x^2 - 2x - 15 = 0$, c'est bien difficile ...

Par contre, si on factorise l'expression à gauche: $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, le problème devient: trouver tous les x tels que $(x-5)(x+3) = 0$, ce qui est facile à résoudre: soit $x-5=0$, soit $x+3=0$, c'est-à-dire soit $x=5$, soit $x=-3$

A savoir 5 Méthodes pour factoriser

1 Mise en évidence

La **mise en évidence** est une technique fondamentale de factorisation qui consiste à utiliser la distributivité "dans l'autre sens ": si a, b et c sont des variables réelles, alors

$ab + ac = a(b+c)$ $\qquad$ $ab - ac = a(b-c)$

Exemple 1: faire apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 21$ puis factoriser:

$A = 3 \times y + 3 \times 7$ ← On repère un facteur commun.

$A = 3(y + 7)$ ← On factorise par mise en évidence.

Exemples 2: Factoriser l'expression $E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

$E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7)$ ← On repère un facteur commun.

$E = (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)]$ ← On factorise par mise en évidence.

$E = (5x - 7)(4x + 5)$ ← On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

2 Identités remarquables

Les **identités remarquables** apprises par cœur, permettent de retrouver la forme développée de certaines expressions.

Exemple: Factoriser l'expression $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$B = 25x^2 - 20x + 4$ ← On observe trois termes et des signes différents.

$B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ ← On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ *avec* $a = 5x$ et $b = 2$.

$B = (5x - 2)^2$ ← On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Remarque: Utilisées de gauche à droite, les identités remarquables développent, utilisées de droite à gauche, elles factorisent.

Remarque: L'expression $x^3 - 5x^2 - 4x - 20$ se factorise en $(x^2 - 4)(x + 5)$ mais le facteur $x^2 - 4$ peut encore s'écrire sous la forme $(x+2)(x-2)$. On dit alors que $(x^2 - 4)(x + 5)$ est **partiellement factorisé** et que $(x+2)(x-2)(x+5)$ est **complètement factorisé**.

3 Factoriser encore: de bons « trucs »!

Les astuces permettant de factoriser une expression algébrique sont nombreuses et lors d'exercices, c'est à vous que revient le choix du(des) meilleur(s) outil(s) à employer.
Il arrive que plusieurs techniques différentes mènent à une même factorisation. De plus, vous pouvez à tout moment tester l'exactitude de votre factorisation en développant le résultat obtenu pour vérifier si on retrouve bien l'expression initiale !

a. Mise en évidence partielle

Exemple: factoriser l'expression $4ac + 2bc - 2ad - bd$

$$4ac + 2bc - 2ad - bd = 2c(2a + b) - d(2a + b) = (2a + b)(2c - d)$$

b. Factoriser par ajout de parenthèses

Exemple: factoriser l'expression $x^2 + 6x + 9 - y^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 - y^2 &= (x^2 + 6x + 9) - y^2 \\ &= (x+3)^2 - y^2 \\ &= [(x+3)+y][(x+3)-y] \\ &= (x+y+3)(x-y+3) \end{aligned}$$

c. Factoriser par ruse de signe

Exemple: factoriser l'expression $(a+b+c)(c-d)+(a+c+d)(d-c)$

$$\begin{aligned}(a+b+c)(c-d)+(a+c+d)(d-c) &= (a+b+c)(c-d)-(a+c+d)(c-d)\\ &= (c-d)[(a+b+c)-(a+c+d)]\\ &= (c-d)(b-c)\end{aligned}$$

d. Factoriser par déplacement de termes

Exemple: factoriser l'expression $x^2+xz+z-1$

$$x^2+xz+z-1=x^2-1+xz+z=(x+1)(x-1)+z(x+1)=(x+1)(x-1+z)$$

A savoir 6 Un peu de méthode

Même si plusieurs chemins mènent à la factorisation complète, il souvent judicieux d'essayer ces différentes techniques dans un ordre précis.

1. La mise en évidence
2. Les identités remarquables
3. Les autres trucs et astuces de factorisation

Exemple: Factoriser l'expression $C=3x^5+6x^3+27x$

$C = 3x^5 + 6x^3 + 27x$ ⟵ On met en évidence.
$C = \mathbf{3x}(x^4 + 2x^3 + 9)$ ⟵ On factorise avec l'identité remarquable.
$C = \mathbf{3x}(x^2 + 3)^2$ ⟵ On factorise avec l'identité remarquable.

Exemple: factoriser l'expression $x^2+xz+z-1$

$$5x^3-45x=5x(x^2-9)=5x(x-3)(x+3)$$

Exemple: factoriser l'expression $(2x+1)(-y^2-2)-(3-2y^2)(2x+1)$

$$\begin{aligned}(2x+1)(-y^2-2)-(3-2y^2)(2x+1) &= (2x+1)[(-y^2-2)-(3-2y^2)]\\ &= (2x+1)(-y^2-2-2+2y^2)\\ &= (2x+1)(y^2-4)\\ &= (2x+1)(y-2)(y+2)\end{aligned}$$

Exercices d'entraînement

1 Calculer :

a. la différence de $2x^3-4x^2+5x+1$ et de x^4-3x^2-2x+3.

b. le produit de x^2-3x+5 par $2x-3$.

2 Réduire le plus possible les expressions suivantes :

a. $(6x+5y)-(4x+y-3z)-(2z+5x+3y)$

b. $2a-(3b+3c)-(5b-(6c-6b)+5c)$

3 Développer le plus possible les expressions suivantes:

a. $(3a)^3$

b. $\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^3$

c. $(5x^2)^4$

d. $(2dx^3y^4)^3$

e. $9x(3x+1)$

f. $13x^2(2x-5)$

g. $ax(b-3x)$

h. $5x^3(x^2+1)$

4 n désigne un nombre entier. On pose $A = (3n + 1)^2 + 16n^2 - 26n + 3$.

a. Développer et réduire A.

b. Montrer que A est le carré d'un nombre entier.

5 Développer puis réduire ces expressions le plus possible :

a. $\left(n-\frac{1}{6}\right)^2$

b. $\left(t+\frac{1}{4}\right)^2$

c. $\left(y+\frac{2}{5}\right)\left(y-\frac{2}{5}\right)$

d. $\left(4x-\frac{3}{8}\right)^2$

e. $\left(3x+\frac{7}{2}\right)^2$

f. $\left(\frac{2}{3}w+5\right)\left(5-\frac{2}{3}w\right)$

6 Développer puis réduire les expressions suivantes.

a. $(a+3b-1)^2$

b. $(2x+3)^3$

c. $(4x-1)(x^2+3x+2)$

7 Soit x une variable réelle.
On considère l'expression suivante :
$x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^2-9)$

a. L'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^2-9)$ est une ....

b. $x^4(x^2-3)(x^2+3)$ et $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^2-9)$ sont les .... de l'expression [compléter]

c. L'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)$ est ....

d. x^4, (x^2-3) et (x^2+3) et sont les .... de l'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)$

e. Développer le plus possible et simplifier au maximum $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^2-9)$

f. Factoriser le plus possible $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

8 Factoriser le plus possible les expressions suivantes:

a. $8a^3+10a^2-2a$

b. $112a^3b^2c^2+32a^3b^2c^3+16a^2b^2c^3$

c. $y(b-a)-x(b-a)$

d. x^4+x^6

e. $12-12x$

f. $(a+b)(c-a)+(a+b)(a-b)+(a+b)(b-c)$

9 Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a. x^2-1

b. $4a^2-4ab+b^2$

c. $x^2+16x+64$

d. $9x^2-12x+4$

e. $x^4+2x^2y^2+y^4$

f. $16x^4-49$

10 Factoriser le plus possible les expressions suivantes:

a. $E = (2x + 1)^2 + (2x + 1)$

b. $F = 3(2x - 3)^2 - (2x - 3)$

c. $G = (x + 4)(3x + 4) - x - 4$

d. $H = (3x + 7)(2x + 1) + (x - 4)(- 2x - 1)$

11 Factoriser le plus possible les expressions algébriques suivantes:

a. $x^2+16-8x$

b. x^4+2x^2+1

c. $a^2-a+\frac{1}{4}$

d. $0,81-0,64x^2$

e. $x^2+5x-14$

f. x^2+2x-8

Exercices d'entraînement

12 Factoriser le plus possible les expressions suivantes:

a. $4x^2+12xy+9y^2$

b. $(x+1)^2-(x-1)^2$

c. $(a+b)^2+c^2$

d. $(a-b)^2-2x(a-b)+x^2$

13 Factoriser le plus possible les expressions suivantes:

a. $y(b-a)-x(a-b)$

b. $x^2+1+a(x^2+1)$

c. $x^2-1+a(1-x^2)+b(x^2-1)a$

14 Factoriser complètement les expressions algébriques suivantes en utilisant tous les outils à disposition.

a. $5x^3-45x$

b. $(2x+1)(-y^2-2)-(3-2y^2)(2x+1)$

c. $x^2-4-(x+1)(x-2)+(x-2)^2$

d. $(7x-3)(7x+3)-(3x-4)^2$

e. $2x(4x+6)(2x-2)-4x(2x+3)(3x-3)$ $+6x(6x+9)(5x-5)$

f. $(3x+2)^2-(x-5)^2$

g. $(1-4x)(2x+3)-(4x-1)(3x+2)$ $+16x^2-1$

h. $(x^2+3x-10)^2-(x^2+2x-8)^2$

15 On donne le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi au départ.
- Ajouter 9 à ce produit.
- Écrire le résultat.

a. Écrire les calculs intermédiaires et donner le résultat fourni lorsque le nombre choisi est 2. Recommence avec − 5.

b. Écrire ces deux résultats sous la forme de carrés de nombres entiers.

c. Démontrer que le résultat est toujours un carré, quel que soit le nombre choisi au départ.

16 Impossible? Calculer
$34356786456 \cdot 34356786447-34356786451^2$

17 On considère la suite des carrés parfaits 1 ; 4 ; 9 ; 16 ;...

a. Calculer 4 − 1, puis 9 − 4, puis 16 − 9, puis 25 − 16. Que constatez-vous ?

b. Que pouvez-vous conjecturer à propos de la suite des différences de deux carrés successifs ? Démontrer cette propriété.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

18 Développer et simplifier le plus possible les expressions suivantes.

a. $3y-((2x-4y)-x-(y+2x-(4y-x)-y))$

b. $(x+2)^2-(x+1)^2$

c. $(x-3)(x+3)-(5-2x)(5+2x)$

d. $(x+y)(y-x)(x^2+y^2)$

e. $(3x^2-5x+7)(x+4)+(2x^2-8x+3)(x-4)$

f. $3(2x+1)^2-(3-5x)(x-1)+(5-3x)(5+3x)$

g. $(2x+3x^2y)^3$

h. $(-a^2-b^4)^3$

19 Mettre en évidence le plus de facteurs possibles.

a. $4a^3-7a^2+3a$

b. $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$

c. $4v^2z-16v^3z^2+8vz^4-16vz$

d. $7a^3b^2c-14a^2b^2c^2+28ab^3c$

20 Factoriser à l'aide des identités remarquables.

a. $4x^2+12xy+9y^2$

b. $a^2-a+\frac{1}{4}$

c. $25x^4-y^2$

d. $49x^2+28x+4$

e. x^4+2x^2+1

f. x^2+a^4

g. $x^2-8x+12$

h. $x^2-14x+13$

i. $x^2+5x-14$

j. x^2+x-20

Exercices d'entraînement

21 Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a. $(7x-1)(2x+3)-(3x+1)(7x-1)$

b. $(3x+2)(x+1)+4(1-x)+(5x-3)(x-1)$

c. $7x(8x-3)+(3-8x)(2x-5)-16x+6$

d. $(8x+4)(x+5)-(x-5)(2x+1)$

e. $(x+2)^2-(x+9)^2$

f. $(4x-3)(x+1)-(4x-3)$

g. $x-2-3(x-2)^2-4x(x-2)$

h. $(4-x)(x+1)+(2x-8)x(x-4)$

22 Factoriser le plus possible les expressions suivantes.

a. $(x^2-49)(2x+5)-(4x+28)(x-7)$

b. $(x^2+3x-10)^2-(x^2+2x-8)^2$

c. $(2-3x)(x-1)+(3x-2)^2$

d. $25x^2+(5x-2)(x-1)-(5x-2)^2-4$

e. $x^2+4(2-x)-4+(x-2)^2$

f. $(2x+5)(x+1)^4-(x+1)^5$

g. $4(5x+3)^2-9(x-1)^2$

h. $(x+4)^2-2(x+4)(2x-3)+(2x-3)^2$

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

18

a. $2x$

b. $2x+3$

c. $5x^2-34$

d. x^4-y^4

e. $5x^3-9x^2+22x+16$

f. $8x^2+4x+31$

g. $8x^3+36x^4y+54x^5y^2+27x^6y^3$

h. $-a^6-3a^4b^4-3a^2b^8-b^{12}$

19

a. $a(3bc-7b+2-3c)$

b. $a(a^3b^3+6a^3b^4+b^5-a^3)$

c. $4vz(v-4v^2z+2z^3-4)$

d. $7ab^2c(a^2-2ac+4b)$

20

a. $(2x+3y)^2$

b. $(a-\frac{1}{2})^2$

c. $(5x^2-y)(5x^2+y)$

d. $(7x+2)^2$

e. $(x^2+1)^2$

f. non factorisable

g. $(x-6)(x-2)$

h. $(x-13)(x-1)$

i. $(x-2)(x+7)$

j. $(x-4)(x+5)$

21

a. $(7x-1)(-x+2)$

b. $(x-1)(8x-5)$

c. $(8x-3)(5x+3)$

d. $(2x+1)(3x+25)$

e. $-7(2x+11)$

f. $(4x-3)x$

g. $-7(x-2)(x-1)$

h. $(x-4)x$

22

a. $(x+7)(x-7)(2x+1)$

b. $(2x+9)(x-2)^2$

c. $(3x-2)(2x-1)$

d. $(5x-2)(x+3)$

e. $2(x-2)^2$

f. $(x+1)^4(x+4)$

g. $(13x+3)(7x+9)$

h. $(-x+7)^2$

"Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !"

Albert Einstein (1879-1955)

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ Le vocabulaire relatif aux expressions algébriques étudiées ici : somme, produit, terme, facteur.
- ✔ Le lien entre la distributivité et la mise en évidence.
- ✔ Le vocabulaire relatif aux manipulations des expressions algébriques : développer, réduire et factoriser.
- ✔ La raison pour laquelle on factorise.
- ✔ Les outils pour développer.
- ✔ Les outils pour factoriser.
- ✔ Les identités remarquables comme des théorèmes que l'on sait démontrer.

Savoirs-faire

- ✔ Distinguer une expression sous forme de somme ou sous forme de produit.
- ✔ Repérer les termes et les facteurs.
- ✔ Développer et réduire une expression algébrique donnée.
- ✔ Factoriser complètement une expression algébrique donnée en maîtrisant les différentes techniques proposées.

Chapitre 7 - Equations

Voir aussi le complément « Histoire de l'algèbre »[1]



François Viète 1540-1603

Problème

Quelle heure à la seconde près, entre 2 heures et 3 heures les aiguilles d'une montre sont :

a) Superposées

b) Dans le prolongement l'une de l'autre

c) A quelle heure font-elles un angle droit?

1 En téléchargement libre à l'adresse http://sesamath.ch/manuel-degre12

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Choix de l'inconnue

Trois personnes se partagent la somme de 316 Frs. On veut trouver la part de chacune sachant que la seconde a 32 Frs de plus que la première et que la troisième a 15 Frs de plus que la seconde.

1. Soit x la part de la première personne. Mettre ce problème en équation puis le résoudre.

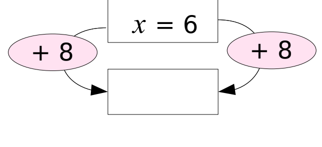
2. Soit x la part de la deuxième personne. Mettre ce problème en équation puis résoudre.

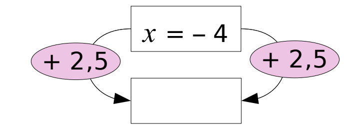
3. Y a-t-il une autre possibilité pour le choix de l'inconnue ? Si oui, mettre ce problème en équation à partir de ce choix puis le résoudre.

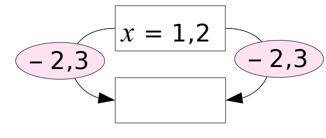
4. Conclure.

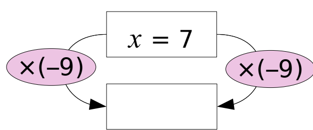
Activité 2 Techniques de résolution d'équations

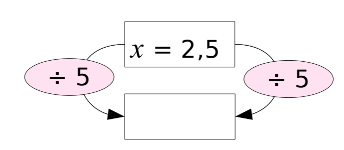
1. Recopier puis transformer chaque égalité en une égalité équivalente:

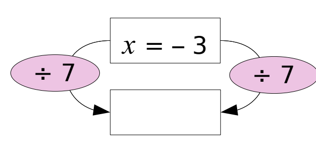




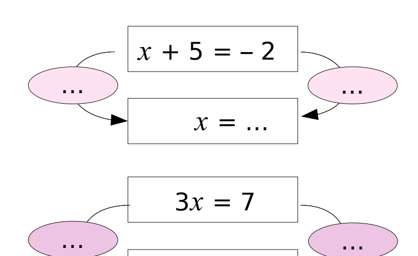








2. Le but est de déterminer x dans chacune des équations suivantes. Recopier puis déterminer l'opérateur.



On rédige de la façon suivante :

$$x + 5 = -2$$
$$x + 5 - 5 = -2 - 5$$
$$x = -7$$

On rédige de la façon suivante :

$$3x = 7$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$$
$$x = \frac{7}{3}$$

3. Utiliser d'abord les opérateurs pour résoudre les équations suivantes puis rédiger comme ci-dessus. Vérifier ensuite que la solution est juste.

a. $x - 5,2 = 2,6$ **b.** $-6,5x = -14,2$ **c.** $-x = 7,2$

4. De la même façon mais en deux étapes, résoudre les équations suivantes:$2x + 3 = 4x + 7$

a. $7x - 6 = -1 + \frac{14x - 8}{2}$ **b.** $2,6 - 5x = -1,4$

Activité 3 Interprétation du résultat

Problème 1 : Sylvia a sept ans de plus que sa soeur Rose. Dans 10 ans, Sylvia aura le double de l'âge de Rose. Quel est l'âge de Rose ? Appelle x l'âge de Rose.

Problème 2 : En 2000, Paul avait 10 ans et Louis 17 ans. En quelle année, l'âge de Louis a-t-il été le double de l'âge de Paul ? Appeller x la différence entre cette année et 2000.

1. Mettre ces deux problèmes en équation. Que remarque-t-on ?

2. Résoudre l'équation.

3. En déduire la solution de chaque problème et conclure.

Activité 4 Produit nul

Résoudre les équations suivantes:

1. $3x(3x+6)(x+3)=0$

2. $(10x+7)(x-5)(x+3)=0$

3. $(x+3)(4x-1)(x-3)=0$

4. x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=0

Activité 5 Equations simples?

1. Trouver un nombre dont le carré additionné à lui-même vaut 12.

2. Résoudre l'équation $49x^2 - 56x + 4 = 0$.

3. Résoudre l'équation $x^2 = 9$.

4. Résoudre l'équation $x^2 = 2$.

Activité 6 Bonne méthode?

Méthode 1 : L'équation équivaut à :

$$5x + 3 = 2x + 3$$
$$3x = 0$$
$$x = 0$$

L'équation a une solution : 0.

Méthode 2 : L'équation équivaut à :

$$5x^2 + 38x + 21 = 2x^2 + 17x + 21$$
$$3x^2 + 21x = 0$$
$$3x + 21 = 0$$
$$x = -7$$

L'équation a une solution : - 7.

Pour résoudre l'équation $(x + 7)(5x + 3) = (x + 7)(2x + 3)$ des élèves ont trouvé deux méthodes :

a. Quelle méthode vous paraît-elle préférable et pourquoi ?

b. Avez-vous une troisième méthode (meilleure!) à proposer ?

Activité 7 Complétion du carré

1. Résoudre l'équation $9x^2 + 6x - 8 = 0$

2. Pourquoi parle-t-on de « complétion du carré »?

3. Résoudre les équations suivantes:

a. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

b. $9x^2 + 6x + 8 = 0$

c. $4x^2 + 5x + 1 = 0$

d. $x^2 + x - 1 = 0$

Activité 8 Formule de Viète

1. Démonter que si $a \neq 0$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (formule de Viète) en utilisant la complétion du carré.

2. Résoudre les équations suivantes avec la formule de Viète en donnant un résultat exact simplifié au maximum:

a. $3x^2 - x - 1 = 0$

b. $16x^2 + 12x + 14 = -12x + 5$

c. $x^2 + 4x + 2 = 0$

d. $x^2 - 3x = -4$

3. Qui était François Viète ? Faire une recherche...

4. Factoriser le plus possible:

a. $3x^2 - x - 1$

b. $16x^2 + 24x + 9$

c. $x^2 + 4x + 2$

d. $x^2 - 3x + 4$

Activité 9 Utilisation de la calculatrice

1. Programmer la formule de Viète avec votre calculatrice.

2. Résoudre $2x^2 = 5x + 11$ et donner les réponses sous forme exacte simplifiée au maximum.

Activité 10 Equations de degrés 2 ... et plus

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3(3 - x^2)(7 + 2x^2) = 0$

2. $(1 - x^2)x - 2(x^2 - x) = -x(x^2 - 2x + 1)$

3. $x^{35}(3 - x^2)(7 + 2x^2)(x - \sqrt{3})(2 - 3x) = 0$

4. $-2(x^2+4x+3)(x^2+x+3)(x^2+3x+1) = 0$

Activité 11 Plus dur

Résoudre $3x^4 + 6x^2 = 9$

Activité 12 Equation paramétrique

Pour quelles valeurs de m ($m \in \mathbb{R}$) l'équation $x(x+4)=m$ admet-elle une unique solution ?

Activité 13 Problèmes

1. Un magasin de vêtements faisant les soldes annonce que tous les prix ont été baissés de 20%. Si le prix d'une chemise soldée est 28.- quel était son prix de vente ?

2. Le sixième d'un piquet est enfoncé dans la terre, les deux cinquièmes dans la neige et le reste, qui est en dehors, mesure 3,25m. La température de l'air est de 4°. Quelle est la température de la neige ?

3. Une société d'investissement a 100'000.- à investir pour un client et décide d'investir dans deux fonds,A et B. L'intérêt annuel attendu, ou intérêt simple pour le fonds A est de 15%, mais il y a un certain risque et le client ne veut pas investir plus de 50'000.- dans ce fonds. Pour le fonds B plus solide, l'intérêt escompté est de 10%. Déterminer s'il y a une façon d'investir l'argent pour que l'intérêt annuel soit:

a. 12'000.-

b. 13'000.-

4. Un chimiste a 10 millilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 30%. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour augmenter la concentration à 50%?

5. Un radiateur contient 8 litres d'un mélange d'eau et d'antigel. Si 40% du mélange est de l'antigel, combien devrait-on enlever du mélange pour le remplacer par de l'antigel pour que le mélange résultant contienne 60% d'antigel?

6. Deux villes sont reliées par une autoroute. Une voiture quitte la ville B à 13 heures et roule à la vitesse constante de 40 km/h vers la ville C. Trente minutes plus tard, une autre voiture quitte B et roule vers C à la vitesse constante de 55 km/h. Si l'on ne tient pas compte de la longueur des voitures, à quel moment la seconde voiture rejoindra-t-elle la première ?

7. On doit construire un silo à grains formé d'un cylindre circulaire droit de 2 m de rayon et de hauteur h m et pour la base d'un cône circulaire droit de hauteur $\frac{h}{2}$. Pour quelle valeur de h le volume V total du silo sera-t-il de 500 m/s ?

8. Deux pompes sont utilisables pour remplir un réservoir d'essence. La pompe A, utilisée seule, peut remplir le réservoir en 3 heures, et la pompe B, utilisée seule, peut le remplir en 4 heures. Si les deux pompes sont utilisées simultanément, combien faudra-t-il de temps pour remplir le réservoir ?

9. On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés. De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de $48\,cm^3$?

10. La hauteur h (en m) au-dessus du sol d'une fusée jouet t secondes après son lancement est donnée par $h=-4,9t^2+36t$. Quand la fusée sera-t-elle à 60 m du sol ?

A savoir 1 Equations à une inconnue

Définitions

Une **équation à une inconnue** est une égalité entre deux expressions algébriques, appelées membre de gauche et membre de droite de l'équation, et une variable qu'on note le plus souvent x mais qui peut être représentée par n'importe quelle autre lettre.

Dans notre contexte, il sera implicite, si cela n'est pas précisé autrement, que la variable représente un nombre réel.

Exemples

- $x + 5 = 9$ est une équation à une inconnue x .
- $2y^5 + 5y = 3y - 6$ est une équation à une inconnue y .
- $\frac{1}{x+5}=\frac{9}{x}$ est une équation à une inconnue x .

Définitions

Soit une équation à une inconnue x.
Alors **une solution de l'équation** est une valeur qui, lorsqu'on l'attribue à la variable x, transforme l'équation en une égalité vraie.

Exemples

- 1 est une solution de $2x^5 + 5x = 7$, car l'égalité $2{\cdot}1^5 + 5{\cdot}1 = 7$ est vraie.
- 3 n'est pas une solution de $2x^5 + 5x = 7$, car $2{\cdot}3^5 + 5{\cdot}3 = 7$ est fausse.

Résoudre une équation, c'est déterminer toutes les solutions de l'équation.

L'**ensemble des solutions d'une équation** est l'ensemble qui contient exactement toutes les solutions de l'équation.

Notation

On note **S** l'ensemble des solutions d'une équation.
Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on note **S = Ø** ou **S = { }**.

Exemples

- si on considère l'équation $x + 5 = 9$, alors $S = \{4\}$
- si on considère l'équation $(x+5)(x-1)=9$, alors S={-5;1}
- si on considère l'équation $x^2 = -1$, alors S = Ø

Définition

Deux **équations** sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemples

• x + 5 = 9 et x + 7 = 11 sont des équations équivalentes, car dans les deux cas S ={4}

• x + 5 = 9 et x + 7 = 12 ne sont pas des équations équivalentes, car l'ensemble des solutions de x + 5 = 9 est S ={4}, alors que l'ensemble des solutions de x + 7 = 12 est S ={5}

Notation

Pour indiquer que deux équations sont équivalentes, on utilise le symbole ⇔ .

Exemple

$2x - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

ou (autre écriture):

$$\begin{aligned} & 2x-5=1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x=6 \\ \Leftrightarrow \quad & x=3 \end{aligned}$$

Théorème sur les équations équivalentes (sans démonstration)

1. Si **on additionne ou on soustrait** aux deux membres d'une équation **un même nombre**, on obtient une nouvelle équation équivalente.
2. Si **on multiplie ou on divise** les deux membres d'une équation **par un même nombre non nul**, on obtient une nouvelle équation équivalente.

Exemples

$$\begin{aligned} & x-5=2 \\ \Leftrightarrow \quad & x-5+5=2+5 \\ \Leftrightarrow \quad & x=7 \end{aligned}$$

si on additionne le même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation équivalente à la première

$$\begin{aligned} & X+2=9 \\ \Leftrightarrow \quad & X+2-2=+9-2 \\ \Leftrightarrow \quad & x=7 \end{aligned}$$

si on soustrait le même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation équivalente à la première

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}x=4 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{2}=4x\cdot\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x=6 \end{aligned}$$

Si on multiplie par le même nombre réel <u>non nul</u> les deux membres d'une équation, alors on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

$$\begin{aligned} & 3x=12 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3x}{3}=\frac{12}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & x=4 \end{aligned}$$

Si on divise par le même nombre réel <u>non nul</u> les deux membres d'une équation, alors on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

A savoir 2 Equations à plusieurs inconnues

Définitions

Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques (le membre de gauche et le membre de droite).

Une **équation à deux inconnues** est une équation qui comprend deux variables.
Une **équation à *n* inconnues** est une équation qui comprend *n* variables.

Dans notre contexte, il sera implicite, si cela n'est pas précisé autrement, que les variables, qu'on note le plus souvent par les lettres x, y, z, t, ..., représentent des nombres réels.

Exemples

- $x + 5 = 9$ est une équation à une inconnue x .
- $2x^5 + 5y = 3x - 6$ est une équation à deux inconnues x et y .

Définition

Soit une équation à deux inconnues x et y .
Une **solution d'une équation en *x* et *y*** est un couple $(a\ ;\ b)$, qui, lorsqu'on remplace x par le nombre a et y par le nombre b donne une égalité vraie.

Exemple : Soit l'équation $2y = 3x – 1$.

- Le couple (1 ; 2) est une solution de l'équation puisque si $x = 1$ et $y = 2$, l'égalité $2\cdot 1 = 3\cdot 1-1$ est vraie.
- Le couple (3 ; 5) n'est pas une solution de l'équation puisque si $x = 3$ et $y = 5$, l'égalité $2\cdot 3 = 3\cdot 5-1$ est fausse.

A savoir 3 Equations du premier degré

Définition

Une **équation du 1er degré** (ou **équation de degré 1**) est une équation équivalente à une équation de la forme $ax + b = 0$, où x est une variable réelle et a et b sont des constantes réelles avec a non nulle.

Exemples

- $2x-3=-3x-1$ et $\pi x-3\cdot\sqrt{2}+x=1$ sont des équations du premier degré
- $\frac{1}{x-1}=2$ et $\pi x^2-3\cdot\sqrt{2}+x=1$ ne sont pas des équations du premier degré

Simplifier une équation

Exemple: Simplifier l'équation suivante : $5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=7+\frac{8x}{5}-4$.

On développe d'abord puis on réduit chacun des deux membres de l'équation :

$5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=5\times\frac{2}{3}x+5\times 1=\frac{10}{3}x+5$ | $7+\frac{8x}{5}-4=\frac{8x}{5}+7-4=\frac{8x}{5}+3$. Soit :

$\frac{10}{3}x+5=\frac{8}{5}x+3$	On réduit d'abord chaque terme de l'équation au même dénominateur, ici 15.
$\frac{50}{15}x+\frac{75}{15}=\frac{24}{15}x+\frac{45}{15}$	On multiplie chaque membre par 15 pour simplifier l'équation.
$50x + 75 = 24x + 45$	Il reste à résoudre l'équation $50x + 75 = 24x + 45$

Résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du 1er degré, il faut isoler l'inconnue. Pour cela, on transforme l'équation en une autre équation qui lui est équivalente..

Exemple: Résoudre l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

$7x + 2 = 4x + 9$ $7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$	**On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $4x$ aux deux membres.
$3x + 2 = 9 + 0x$ $3x + 2 - 2 = 9 - 2$	**On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche** en retranchant **2** aux deux membres.
$3x = 7$ $\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$ $x = \frac{7}{3}$	**On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par **3**.

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ pour $x=\frac{7}{3}$. On vérifie ensuite que $\frac{7}{3}$ est une solution effective de l'équation initiale $7x + 2 = 4x + 9$.

A savoir 4 Equations du deuxième degré

Définition

Une **équation du 2e degré** (ou **équation de degré 2**) est une équation équivalente à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où x est une variable réelle et a, b et c sont des constantes réelles avec a non nulle

Exemples

- $2x^2-3=-3x^2+x-1$ et $\pi x^2-3\cdot\sqrt{2}+x=1$ sont des équations du 2e degré
- $2x^2-3=-3x^3+x-1$ et $\frac{1}{x^2-1}=2$ ne sont pas des équations du 2e degré

Le cas particulier de l'équation $x^2=a$

Théorème

Les solutions de l'équation $x^2=a$ (pour $a\geqslant 0$)sont $x_1=+\sqrt{a}$ et $x_2=-\sqrt{a}$

Résoudre une équation de degré 2 par factorisation

Si p et q sont des expressions algébriques, alors
p·q = 0 <=> p = 0 ou q = 0

Autrement dit :

Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

Cette propriété permet de trouver toutes les solutions d'une équation de degré 2 lorsqu'une factorisation est trouvée.
Attention, il faut qu'un des membres de l'équation soit nul (c'est-à-dire le nombre 0 doit apparaître d'un côté de l'équation).

Exemple: Résoudre l'équation $2x^2 - 3x = x^2 + x + 21$.

$2x^2 - 3x = x^2 + x + 21 \quad | - x^2 - x - 21$ On commence par rendre nul le membre de droite.

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$(x + 3)(x - 7) = 0$ On factorise le membre de gauche.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.
On en déduit que :

$x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$

$x = -3$ ou $x = 7$

On teste les valeurs trouvées.
Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.
Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.

Donc $S = \{-3 ; 7\}$

Remarque: cette méthode fonctionne aussi pour une équation de degré > 2 qu'on peut factoriser.

Résoudre une équation de degré 2 par complétion du carré

Pour **compléter la carré $x^2 + kx$ ou $x^2 - kx$**, on ajoute $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; c'est-à-dire on ajoute le carré de la moitié du coefficient de x.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$ par la complétion du carré

$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad | -3$ On commence par écrire à gauche les termes de l'équation contenant x.

$x^2 - 5x = -3$

$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ On complète le carré en additionnant $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ des deux côtés.

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

On récrit la membre de gauche sous la forme d'une parenthèse au carré

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{12}{4}+\frac{25}{4}$$

et on réduit le membre de droite.

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$x-\frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$$

On prend la racine carrée des deux côtés.

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

On isole x.

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Résoudre une équation de degré 2 par la formule de Viète

Théorème

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du 2ème degré et soit $\Delta = b^2-4ac$ son **discriminant.**
Alors on a:

1 si $\Delta>0$:

les deux solutions distinctes de $ax^2+bx+c=0$ sont données par $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

l'expression ax^2+bx+c se factorise: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2 si $\Delta=0$:

l'unique solution de $ax^2+bx+c=0$ est donnée par $x_0 = -\frac{b}{2a}$

l'expression ax^2+bx+c se factorise: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ (on parle de **solution double**)

3 si $\Delta<0$:

$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution

ax^2+bx+c ne peut pas être factorisée

Exemple: Résoudre l'équation $2x^2 + 5x = -x^2 + 8$

$$2x^2 + 5x = -x^2 + 8 \quad | \ + x^2 - 8$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

Ici a = 3, b = 5, c= - 8

$$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\cdot3\cdot(-8) = 121>0$$

Cette équation a 2 solutions distinctes:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5\pm\sqrt{121}}{2\cdot3} = \frac{-5\pm11}{6}$$

D'où $x_1 = \frac{-5+11}{6} = \frac{6}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{-5-11}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$

Donc $S = \left\{ -\frac{8}{3} \,;\, 1 \right\}$

Remarque: on peut aussi factoriser $3x^2+5x-8=3(x-\left(-\frac{8}{2}\right))(x-1)=3(x+\frac{8}{2})(x-1)$

Exemple: factoriser l'expression $4x^2-4x+1$

Ici a = 4, b = -4 c= 1

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

On peut factoriser: $4x^2-4x+1=4(x-\frac{1}{2})^2$

Remarque: on a aussi résolu l'équation $4x^2-4x+1=0$: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Exemple: résoudre l'équation $4x^2-4x+3=0$

Ici a = 4, b = -4 c= 3 et $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$

Il n'y a pas de solution: $S = \emptyset$

Remarque: on a aussi démontré que l'expression $4x^2-4x+3$ n'est pas factorisable

A savoir 5 Résoudre un problème à l'aide d'une équation

Mettre en équation un problème

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

Remarque : lorsque la résolution d'un problème par l'arithmétique devient fastidieuse voire impossible, utiliser une équation s'avère souvent nécessaire.

Exemple : trouver le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à son double diminué de 3.

Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x le nombre cherché. ← **On repère la grandeur non connue** parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note généralement x et on l'appelle « inconnue ».

Étape n°2 : Mettre en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$. Le double du nombre diminué de 3 est $2x - 3$.	**On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x.
$5x + 7 = 2x - 3$	La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

$$5x + 7 = 2x - 3$$
$$5x + 7 - 2x = 2x - 3 - 2x$$
$$3x + 7 = -3$$
$$3x + 7 - 7 = -3 - 7$$
$$3x = -10$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$$
$$x = -\frac{10}{3}$$

On résout l'équation à l'aide des propriétés de la **méthode 2**.

Étape n°4 : Vérifier que la valeur trouvée est solution du problème

Le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 :

$$5 \times \left(-\frac{10}{3}\right) + 7 = -\frac{50}{3} + \frac{21}{3} = -\frac{29}{3}$$

Le double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3 :

$$2 \times \left(-\frac{10}{3}\right) - 3 = -\frac{20}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{29}{3}$$

Ainsi le quintuple de $-\frac{10}{3}$ augmenté de 7 est égal au double de $-\frac{10}{3}$ diminué de 3.

Étape n°5 : Conclure

Le nombre cherché est donc $-\frac{10}{3}$.

Remarque: cette méthodologie reste bien sûr valable pour des problèmes qui se résolvent avec d'autres types d'équations.

Exercices d'entraînement

1 Etre solution ou non ?

a. Le nombre 1 est-il solution de l'équation $2x^5 - 3x^4 + 4x = 2x + 2$?

b. Le nombre 8 est-il solution de l'équation $5y - 3 = 2y + 2$? Et le nombre -3 ? Et $\frac{5}{3}$?

c. Le nombre $\sqrt{3}$ est-il solution de l'équation $2x^2 + x - 6 = \frac{3}{\sqrt{3}}$?

2 *Proposer une équation*

a. Donner une équation de degré 1 dont l'ensemble de solution soit $S = \{\pi\}$

b. Donner trois équations de degré 1 dont l'ensemble de solution soit $S = \{2\}$

c. Donner une équation de degré 2 dont l'ensemble de solution soit $S = \{-3;4\}$

3 Dire si les égalités suivantes sont toujours, parfois ou jamais vraies.

a. $x^2 - 1 = 0$

b. $x^2 - 1 = x^2 + 1$

c. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

4 On considère les conjectures suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Conjecture 1 : L'équation $\frac{1}{x-1} = 2$ est une équation de degré un.

b. Conjecture 2 : Une équation de degré deux a toujours au moins une solution

5 *Contraintes*

a. Donner une équation du quatrième degré qui admet comme solution l'ensemble $S = \{0;1;2\}$.
Y a-t-il plusieurs réponses ?

b. Donner une équation qui vérifie les conditions suivantes :

• elle est de degré 3 et son ensemble de solutions est $S = \{0;3;5\}$

• elle est de degré 3 et s'annule en $x = 4$ et en $x = -2$

c. Combien d'équations de degré 4 ont comme ensemble de solutions $S = \left\{-1;\frac{1}{2};1;2\right\}$?

6 Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x}{5} - \frac{3x-2}{15} = \frac{1-x}{3}$ **b.** $-4 = \frac{-4x+30}{5}$

7 Résoudre les équations suivantes :

a. $5x + 1 = 5x - 1$

b. $5x = 0$

c. $\frac{2x-4}{2} + 2 = x$

8 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 - 2x + 1 = 0$

b. $x^2 + 4 = 0$

c. $x^2 = 3$

d. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

e. $3x^2 - \frac{1}{15} = 0$

9 Résoudre les équations suivantes.

a. $3x^2 - 7x = 0$

b. $3(x - 1)^2 - 7(x - 1) = 0$

c. $x^2 + 2x + 1 = (2x - 3)(x + 1)$

d. $(x^2 - 9)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 1)^2$

e. $(x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) = (x + 1)(x - 2)$

10 Résoudre les équations suivantes par la complétion du carré.

a. $x^2 + 8x + 9 = 0$

b. $x^2 + 6x + 7 = 0$

c. $4x^2 - 12x - 11 = 0$

11 Résoudre les équations suivantes en donnant un résultat exact simplifié au maximum.

a. $4x^2 + 11x + 6 = 0$

b. $32x + 13x^2 + 29 = 0$

c. $2x^2 - 7x + 3 = 0$

d. $37x + 14 = 15x^2$

e. $11x^2 + 31x + 20 = 0$

f. $0 = 1 + 2x - x^2$

g. $9x^2 - 30x + 25 = 0$

h. $x^2 + x + 1 = 0$

12 Résoudre les équations suivantes, puis factoriser le membre de gauche.

a. $2x^2 + 11x + 9 = 0$

b. $-13x^2 + 17x + 30 = 0$

c. $5x^2 + 4x + 8 = 0$

d. $32x^2 - 32x + 8 = 0$

e. $-9x^2 + 14x + 39 = 0$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

13 Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui admettent pour solution celle de l'équation $7y + 5 = 3y + 8$. Justifier.

a. $4y + 5 = 3y + 8$
b. $7y = 3y + 4$
c. $14y + 10 = 6y + 16$
d. $7y – 5 = 3y + 1$

14 Résoudre les équations suivantes :

a. $5x = 3x + 3$
b. $8x = 12x + 4$
c. $4 – 7y = 10y$
d. $7x + 1 = – 4 – x$
e. $2 + 3x = 7 – 3x$
f. $5 + 6x = – x – 9$
g. $11x + 3 = 8x + 7$
h. $5{,}5x + 1{,}5 = 9x + 6$
i. $7 – 3{,}3x = 2x – 9{,}7$
j. $5{,}1 – x = – 8x + 1{,}7$

15 Résoudre les équations suivantes :

a. $4(x + 5) = 10x + 3$
b. $3(x – 2) = 6(x + 4)$
c. $7x – (5x + 3) = 5(x – 3) + 2$
d. $7(n + 2) – 3 = 25 – (3n + 4)$
e. $4y + 3(4y – 2) = 3(y + 1)$

16 Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{6}{5}$
b. $\frac{5x}{8} - \frac{3}{10} = \frac{7x}{40}$
c. $\frac{2x}{7} + \frac{3}{14} = \frac{x}{7} - \frac{1}{14}$
d. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}x + \frac{4}{5}$

17 Résoudre les équations suivantes :

a. $2x – 7= 5x + 12$
b. $\frac{x}{4} + 3 = 50$
c. $54 + 3x = 0$
d. $\frac{5}{18} - x = \frac{11}{45}$
e. $2(x – 1) – 6(2 – x)= x + 7$
f. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

18 Résoudre les équations suivantes.

a. $(x + 1)(x – 8) = 0$
b. $(5x – 3)(6 + x) = 0$
c. $(11 – 8x)(3x + 7) = 0$
d. $(7 – x)(x – 7) = 0$
e. $2x(3x + 2)(3x – 1) = 0$
f. $x(x + 2)(x - 3) = 0$
g. $(2x + 3)(3x - 1) = 0$

19 Résoudre les équations suivantes.

a. $(5x + 1)(8 – x) = 0$
b. $(3x – 1) + (7 – x) = 0$
c. $(8 + 3x) – (x + 3) = 0$
d. $(3 – 10x)(x + 23) = 0$
e. $6(y + 3) – 2(y – 1) = 0$

20 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 – 10x + 16 = 0$
b. $x^2 – 3x – 4 = 0$
c. $36 = x^2$
d. $x^2 – 5x = – 6$
e. $x^2 – 8x + 7 = 7$

21 Résoudre les équations suivantes.

a. $(x^2 - 7)(x^2 + 2)(x + 3) = 0$
b. $x^4 = 81$
c. $5x^3 = 3x$
d. $(x - 1)^4 - (x + 1)^4 = 0$
e. $x + 3 = x^2(x + 3)$
f. $(x^2 - 3x + 4)(-x^2 + 2x + 3) = 0$

22 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^3 = 4x^2 + 11x$
b. $(x^4 - 3x^3 + x^2)(x^2 - 7) = 0$
c. $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

23 Résoudre les équations suivantes.

a. $(3x^2 + 4)^2 - 2(15x^2 + 20) + 25 = 0$
b. $(2x^2 - 3)^2 - (2x^2 - 2)^2 = 0$
c. $(x^2 + 5)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$
d. $(2x - 3)^2 - 3(4x^2 - 9) = 0$
e. $3(3x - 2)^2 - 2(9x^2 - 4) = 0$

24 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^4 + 81 = 18x^2$
b. $x^4 = 10x^2 – 25$

25 Le ciné-club d'un village propose deux tarifs :

Tarif A : une carte d'adhésion pour l'année coûtant 63 Frs, puis 4,5 Frs par séance ;

Tarif B : 15 Frs par séance sans carte d'adhésion.

a. Calculer, pour chaque tarif, le prix payé pour 8 séances.

b. On appelle x le nombre de séances.

Exprimer en fonction de x le prix payé avec le tarif A, puis avec le tarif B.

c. Quel est le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B ?

26 Joey pense à un nombre, lui ajoute 11, multiplie le tout par 3 et au résultat obtenu il retranche 3. Joey obtient 51.
Quel est le nombre de départ ?

27 Dans ma classe, il y a 28 élèves. Le jour où Lucas était absent, il y avait deux fois plus de filles que de garçons.
Combien y a-t-il de filles dans ma classe ?

28 Mario se rend de Genève à Naples en trois jours. Le premier jour, il parcourt les 5/9 de la distance totale, le deuxième jour, il parcourt la moitié du reste et le troisième jour, il parcourt 252 km.
Calculer la distance de Genève à Naples.

29 Une personne a dépensé le tiers de son argent, puis le cinquième de l'argent restant et il lui reste encore 14 Frs.
Combien d'argent avait-elle initialement ?

30 On achète 100 litres de lait. Pour le vérifier, on le pèse et on trouve 102,7 kg. La masse volumique du lait pur est de 1030 grammes par litre. Donc le lait n'est pas pur. Trouver le volume d'eau qui a été ajouté.

31 Quelqu'un a acheté une pièce de drap. En la revendant 12 Frs le mètre, il gagnerait 100 Frs, et en la revendant 9 Frs le mètre, il perdrait 23 Frs. Quelle est la longueur de la pièce ?

32 Le tiers d'un capital est placé à 5% et le reste à 4%. L'intérêt annuel est de 130 Frs. Quel est ce capital ?

33 Trouver une fraction égale à $\frac{4}{3}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est égale à 63. (Appeler x le numérateur de la fraction recherchée.)

34 On transforme un carré en un rectangle en ajoutant 4,5 cm à la longueur d'un de ses côtés et en retranchant 2 cm à la longueur d'un autre.

a. Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que le double de son périmètre soit égal au périmètre du rectangle ?

b. Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que son aire et celle du rectangle soient égales ?

35 Le métal de la livre anglaise est un alliage cuivre-argent à 7,5 % de cuivre. Combien de grammes de cuivre pur et combien de grammes d'alliage de la livre devrait-on utiliser pour préparer 200 grammes d'alliage cuivre-argent à 10% de cuivre ?

36 Dans un certain test médical destiné à mesurer la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit 7 cl d'une solution à 30 % de glucose. Lorsque le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être ramenée à 20 %.
Combien de solution à 30 % et combien d'eau devra-t-on utiliser pour préparer 7 cl de solution à 20 % ?

37 On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés. De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?

38 Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle à base carrée, dont la hauteur mesure le double du côté de la base et dont le volume mesure 3 fois l'aire de la base.

39 La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage.
Pour une certaine voiture circulant à *v* km/h, la distance de freinage *d* (en m) est donnée par $d=0,2v+0,006v^2$.

a. Calculer la distance de freinage quand *v* vaut 50 km/h.

b. Si un conducteur décide de freiner 100 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

40 Lorsque le prix d'un lecteur de CD en vogue est 300.-, un magasin en vend 15 par semaine. Cependant, chaque fois que le prix est réduit de 10.-, on en vend deux de plus par semaine. Quel était le prix de vente si les revenus de la semaine sont de 7000.-?

41 Une fabrique de boîtes de conserves veut faire une boîte de forme cylindrique de 20 cm de haut, contenant $3000\,cm^3$. Calculer le rayon intérieur r de la boîte.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

13 c.

14

a. S={ $\frac{3}{2}$ }

b. S={-1}

c. S={ $\frac{4}{17}$ }

d. S={ $-\frac{5}{8}$ }

e. S={ $\frac{5}{6}$ }

f. S={-2}

g. S={ $\frac{4}{3}$ }

h. S={ $-\frac{9}{7}$ }

i. S={ $\frac{167}{53}$ }

j. S={ $-\frac{17}{35}$ }

15

a. S={ $\frac{17}{6}$ }

b. S={-10}

c. S={ $\frac{10}{3}$ }

d. S={1}

e. S={ $\frac{9}{13}$ }

16

a. S={ $-\frac{72}{5}$ }

b. S={ $\frac{2}{3}$ }

c. S={-2}

d. S={ $\frac{41}{3}$ }

17

a. S={ $-\frac{19}{3}$ }

b. S={188}

c. S={-18}

d. S={ $\frac{1}{30}$ }

e. S={3}

f. S={3}

18

a. S={-1;8}

b. S={-6; $\frac{3}{5}$ }

c. S={ $-\frac{7}{3}$; $\frac{11}{8}$ }

d. S={7}

e. S={ $-\frac{2}{3}$;0; $\frac{1}{3}$ }

f. S={-2;0;3}

g. S={ $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$ }

19

a. S={ $-\frac{1}{5}$;8}

b. S={-3}

c. S={ $-\frac{5}{2}$ }

d. S={-23; $\frac{3}{10}$ }

e. S={-5}

20

a. S={2;8}

b. S={-1;4}

c. S={-6;6}

d. S={2;3}

e. S={0;8}

21

a. S={-3;3}

b. S={ $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$ }

c. S={-3; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$ }

d. S={-3;3}

e. S={ $-\sqrt{\frac{3}{5}}$;0; $\sqrt{\frac{3}{5}}$ }

f. S={0}

g. S={-3;-1;1}

h. S={-1;3}

22

a. S={ $2-\sqrt{15}$;0; $2+\sqrt{15}$ }

b. S={ $-\sqrt{7}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$;0; $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{7}$ }

c. S={ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ }

23

a. S={ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ }

b. S={ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$ }

c. S= Ø

d. S={-3; $\frac{3}{2}$ }

e. S={ $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{3}$ }

f.

24

a. Tarif A : 99 Frs , Tarif B : 120 Frs

b. Tarif A : 63 + 4,5x

c. Tarif B : 15x

25 6 séances

26 Le nombre de départ est 7.

27 Il y a 18 filles.

28 La distance de Genève à Naples est de 1134 km.

29 Initialement, elle avait 26,25 Frs.

30 Le volume d'eau qui a été ajouté est de 10 litres.

31 La longueur de la pièce de drap est de 41 m.

32 Le capital est de 3000 Frs.

33 La fraction recherchée est $\frac{36}{27}$.

34

a. Le côté du carré doit mesurer $\frac{5}{4}$ cm.

b. Le côté du carré doit mesurer $\frac{18}{5}$ cm.

35 5,4 g de cuivre pur et 194,6 g d'alliage de la livre.

36 Environ 4.67 ($\frac{14}{3}$) cl de solution à 30% et 2,33 ($\frac{7}{3}$) cl d'eau

37 Le côté du morceau de métal carré doit mesurer 10 cm.

38 Le volume est de $\frac{27}{4}$ (= 6,75).

39

a. La distance est de 25m

b. La vitesse est d'environ 113,5 km/h

40 Le prix de vente était de 200 Frs.

41 Le rayon intérieur de la boîte est de $r \approx 6{,}9$ cm.

"*L'équation du bonheur:* $\quad bonheur = \dfrac{satisfaction(s)}{désir(s)}$ "

Inconnu

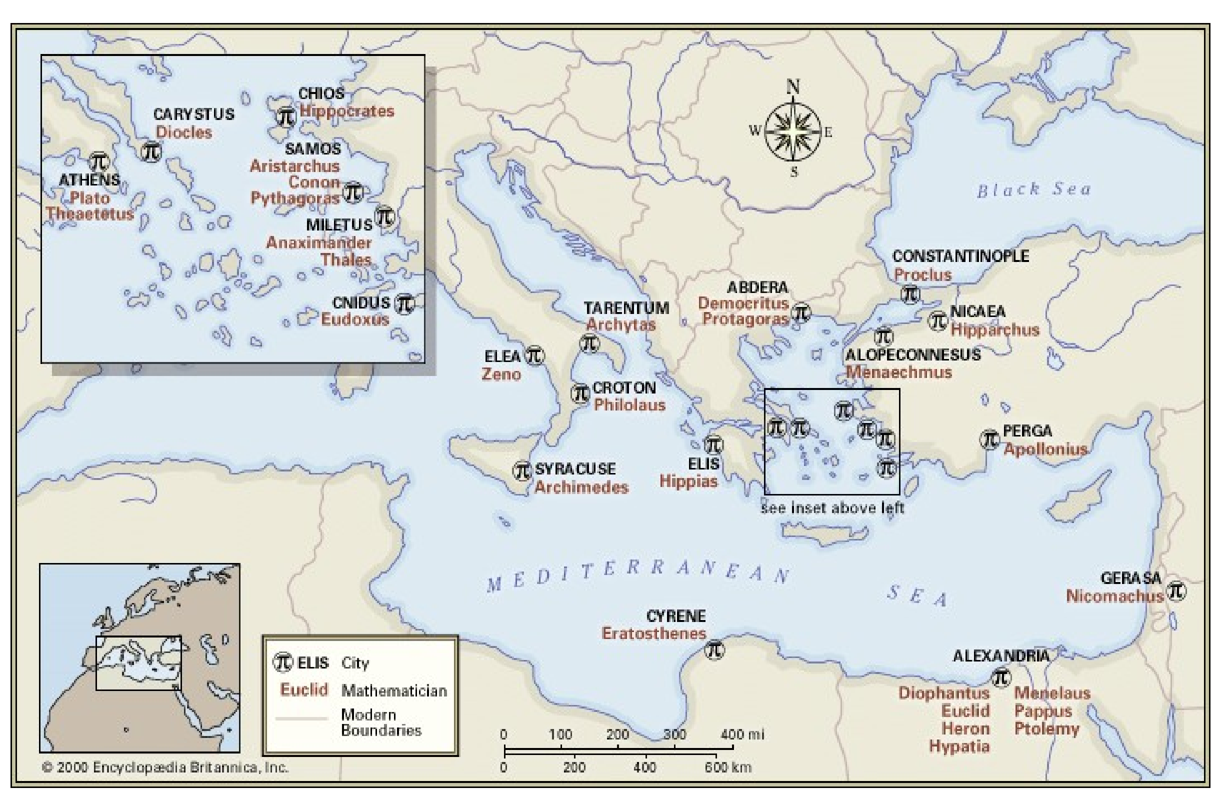
Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ équation, solution, résoudre, ensemble des solutions
- ✔ la différence entre équation et identité
- ✔ comprendre ce que sont des équations équivalentes – connaître le théorème sur les équations équivalentes
- ✔ forme générale d'une équation du 1er degré
- ✔ forme générale d'une équation du 2ème degré
- ✔ un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul
- ✔ connaître la formule de Viète (théorème)

Savoirs-faire

- ✔ simplifier une équation
- ✔ maîtriser les techniques de résolution pour les équations de degré 1, degré 2 et degrés supérieurs se ramenant au degrés 1 ou 2
- ✔ utiliser la calculatrice pour résoudre une équation avec la formule de Viète
- ✔ comprendre la démonstration de la formule de Viète
- ✔ factoriser une expression du 2ème degré avec la formule de Viète
- ✔ résoudre un problème en le modélisant par une équation

Chapitre 8 - Des Egyptiens à Thalès



Source: http://www.britannica.com

Problème

Deux mouches se posent sur l'un des points d'intersection de deux cercles de sucre situés sur une table. Elles partent simultanément, chacune le long de son cercle, à vitesse constante (pas la même), dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Après un tour complet, elles se retrouvent exactement en même temps à leur point de départ. Pendant tout ce temps et sans qu'elles s'en doutent, une araignée les guette, immobile sur la table. Elle a choisi un point , connu d'elle seule, qui lui permet d'être à égale distance des deux mouches à chaque instant de leur périple. Où la cruelle araignée est-elle placée ?

Source principale pour les éléments historiques: Martin Cuénod (DIP-GE)

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Quelques connaissances historiques?

On considère:

a. les civilisations suivantes: Mésopotamie, Mayas, Égypte, Romains, Moyen-Age, Chine, Grèce Antique, Inde, Arabe,

b. les personnages historiques suivants: Thalès, Viète, Al-Khwarzimi, Pythagore, Platon, Euclide,

c. les événements historiques: découverte du zéro indien, formalisation des nombres réels, mesure du rayon de la Terre, découverte des nombres irrationnels, naissance de l'écriture, nombres arabes.

Représenter toutes ces informations sur la chronologie fournie par le professeur et représenter approximativement sur la carte du monde fournie les lieux où vécurent les civilisations évoquées.

Activité 2 L'Égypte ou le temps des arpenteurs

Les civilisations mésopotamiennes, avec leur système de numération sexagésimale de position, étaient bien outillées pour dégager des algorithmes algébriques. On considère du reste la Mésopotamie comme le berceau de l'« algèbre ». Une tradition remontant aux Grecs fait en revanche de la civilisation égyptienne le lieu de naissance de la géométrie.

C'est un texte d'Hérodote qui attribue l'origine de la géométrie à des nécessités d'arpentage à la suite des crues du Nil:

> *Hérodote* (environ 484-420)
> Ce roi, m'ont dit les prêtres, partagea la terre entre tous les Egyptiens par lots carrés d'égale superficie; il assura par là ses revenus, en imposant à leurs possesseurs une redevance annuelle. Tout homme à qui le fleuve enlevait une parcelle de son lot allait signaler la chose au roi ; Sésostris envoyait alors les gens inspecter le terrain et en mesurer la diminution, pour accorder dorénavant à l'homme une réduction proportionnelle de sa redevance. Voilà, je pense, l'origine de la géométrie, qui passa plus tard en Grèce ; mais le cadran solaire, le gnomon et la division du jour en douze parties nous sont venus des Babyloniens.

L'Enquête, II. 109

L'explication d'Hérodote est reprise et complétée par un auteur plus tardif : Diodore de Sicile:

> *Diodore de Sicile* (90-20)
> Les prêtres font apprendre à leurs enfants la géométrie et l'arithmétique ; comme le fleuve, en débordant tous les ans, change souvent l'aspect de la campagne et confond les limites des héritages, seules les personnes habiles dans l'art d'arpenter et de mesurer les terres peuvent en effet prévenir les procès qui naîtraient continuellement entre les voisins. L'arithmétique leur sert ainsi, non seulement pour les spéculations de la géométrie, mais encore pour les besoins de la société.

in : Marchal P.-E., Histoire de la géométrie, pp. 12-13

1. Qui étaient Hérodote et Diodore de Sicile?

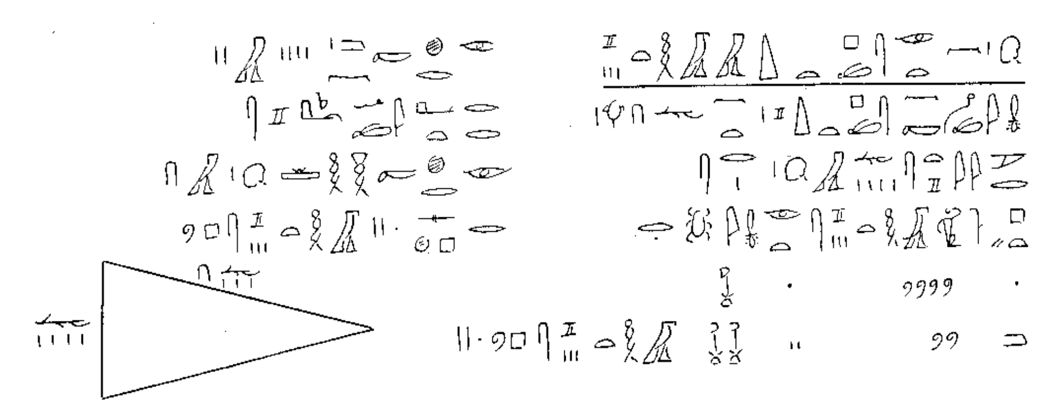
2. Qu'est-ce qu'un arpenteur?

3. Qu'est-ce qu'un gnomon?

4. Lire et commenter le texte suivant qui présente la manière dont le scribe Ahmôse calcule l'aire d'un triangle.

> Ahmôse (1788-1580 av. J.-C.)
> Exemple de calcul d'un triangle de champs.
> Si on te dit : un triangle de 10 khet[1] dans sa hauteur est de 4 khet dans sa base.
> Quelle est sa surface ?
> Tu feras en sorte que tu calcules la moitié de 4 qui est 2 pour en faire un carré.
> Tu feras en sorte de multiplier par 10 fois 2.
> Ceci est sa surface.

R. 51, in : Couchoud S., Mathématiques égyptiennes, pp. 44-45



© Peet, The Rhind Mathematical Papyrus, planche XV

a. Généraliser la procédure en justifiant votre réponse.

b. Qu'était un scribe?

5. Signalons que l'on trouve en Mésopotamie des procédures semblables de calculs relevant de préoccupations géométriques. Les Babyloniens, à l'image des Egyptiens, savaient calculer les surfaces des quadrilatères réguliers et approcher celles des polygones. Ils étaient capables d'approximer le volume de certains corps: prismes, pyramides, troncs de pyramide à base carrée et troncs de cônes. Ils approximaient le périmètre d'un disque en multipliant par 3 (ou 3,125 à la période séleucide) le diamètre. On a retrouvé le tracé de quelques polygones réguliers (hexagone et pentagone notamment) avec la mention du rapport des mesures du côté et de la hauteur. Les Babyloniens avaient cerné la teneur de ce que nous appelons le « théorème de Pythagore » et de sa réciproque, ainsi que celle des grandeurs proportionnelles : notre « théorème de Thalès » !

Activité 3 Calculs d'aires

1. Quelle différence y a-t-il entre « aire » et « surface »?

2. Définir puis donner la formule de calcul d'aire pour les figures suivantes: triangle, trapèze, parallélogramme, losange, rectangle et carré.

---

1 Les Egyptiens utilisaient différentes unités de longueur : la petite coudée valait 6 palmes et chaque palme valait 4 doigts. Cette petite coudée correspondait à 45 de nos centimètres. La coudée royale valait 7 palmes, soit environ 52,3cm. Puis venait le khet, ou verge, valant 100 coudées, et finalement l'iterou, ou rivière d'une longueur de 2000 coudées royales. Les unités de surface les plus courantes étaient l'aroure, ou sétat, correspondant à un carré d'un khet de côté, et le khâ valant 10 khet. L'unité de volume la plus utilisée était l'hékat, ou boisseau, qui valait 4,54 de nos litres.

Activité 4 Thalès historique

1. Quand et où Thalès a-t-il vécu? Qui était-il? Pourquoi est-il célèbre?

2. Lire attentivement les deux textes suivants:

> *Thalès A 21 : Pline (23/24-79)*
> Thalès de Milet a trouvé une méthode pour mesurer la hauteur des pyramides, en mesurant leur ombre à l'heure où elle est régulièrement égale à son objet.
> *Histoire naturelle, 36, 82, in : Dumont, p. 28*

> *Thalès A 21 : Plutarque (environ 40-120)*
> Dressant seulement à plomb un bâton au bout de l'ombre de la pyramide, et se faisant deux triangles avec la ligne que fait le rayon du Soleil touchant aux deux extrémités, tu montras qu'il y avait telle proportion de la hauteur de la pyramide à celle du bâton, comme il y a de la longueur de l'ombre de l'un à l'ombre de l'autre.
> *Le banquet des Sept Sages, 2, p. 147 A, in : Dumont, p. 29*

a. En déduire la démarche suivie par Thalès pour estimer la hauteur des pyramides égyptiennes de Giseh.

b. Qui étaient les « Sept Sages »?

Activité 5 Géométrie euclidienne: une approche moderne

1. Définir et illustrer les termes suivants: plan, point, droites, droites parallèles, droites sécantes, droites perpendiculaires, demi-droite, segment de droite, longueur d'un segment de droite. Clarifier les notations.

2. Angles

a. Définir et illustrer les notions suivantes: angle, angles plein, angle plat, angle droit, angles opposés, complémentaires, supplémentaires, correspondants, alternes-internes. Clarifier les notations.

b. Qu'entend-t-on par « mesure d'un angle »? Quelle différence y a-t-il entre « angle » et « mesure de l'angle »?

c. Quelle relation y a-t-il entre:

- deux angles complémentaires?
- deux angles supplémentaires?

Justifier.

d. On considère le commentaire suivant:

> *Thalès A 20 : Proclus (410/12-485).*
> Ce théorème selon lequel quand deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux, fut découvert pour la première fois, d'après Eudème, par Thalès.
> *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide, 299, 1*

- Énoncer ce résultat sous forme de conjecture avec notre langage.

- Identifier la(les) hypothèse(s) et la(les) conclusion(s) de cette conjecture.
- Démontrer cette conjecture.
- Énoncer sa réciproque. Est-elle vraie ou fausse? Justifier.

e. Quelle relation y a-t-il entre deux angles correspondants? Peut-on le justifier avec nos outils?

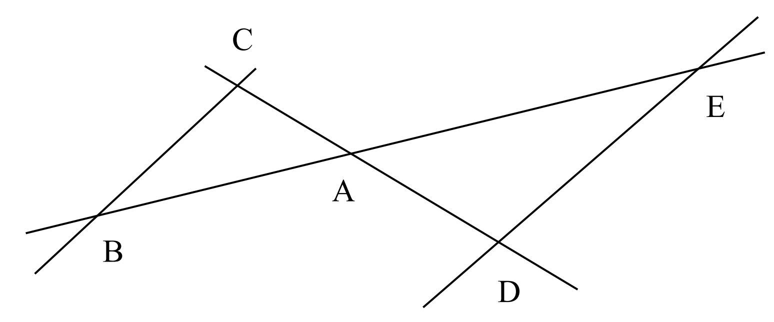
f. Quelle relation y a-t-il entre deux angles alternes-internes? Peut-on le justifier avec nos outils?

3. Triangles

a. Définir et illustrer les notions suivantes: triangle, sommets, côtés, triangle isocèle, triangle rectangle, triangle équilatéral. Clarifier les notations.

b. Énoncer une conjecture quant à la relation entre tous les angles d'un triangle. La démontrer.

c. On considère la situation suivante, où $[BC] \parallel [DE]$:



Que peut-on dire des deux triangles ΔACB et ΔADE ?

Qu'entend-t-on alors par côtés correspondants? Expliciter.

Activité 6 Théorème de Thalès

1. On suppose que:

- $<ACB = <FED$
- $<CBA = <DFE$
- $<BAC = <EDF$
- $\overline{AB} = 28$, $\overline{BC} = 18$
- $\overline{AC} = 12$, $\overline{FE} = 4.5$

Trouver $\overline{DF}$ et $\overline{DE}$.

2. Énoncer le théorème de Thalès, en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

3. Illustrer puis démontrer les deux théorèmes ci-dessous:

a. Théorème

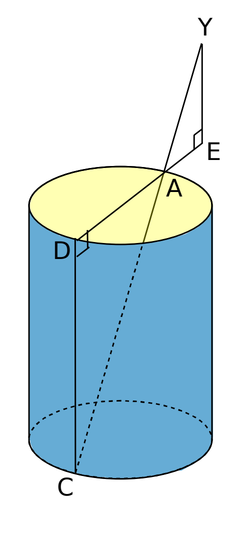
Si on trace, dans un triangle ΔOAB, une droite quelconque parallèle à [AB] coupant [OA] en A' et [OB] en B', alors on a: $\text{Aire}(\Delta ABB')=\text{Aire}(\Delta ABA')$

b. Théorème «Aires égales»

Si on trace, dans un triangle ΔABC, une demi-droite quelconque issue de A et coupant le segment [BC] en I, alors on a: $\frac{\text{Aire}(\Delta ABI)}{BI}=\frac{\text{Aire}(\Delta ACI)}{IC}$

4. Étudier précisément la démonstration du théorème de Thalès donnée ici: http://www.kangmath.com/swf/thales2.html

Activité 7 Application



[AD] est un diamètre d'un puits de forme cylindrique. Le point C est à la verticale de D, au fond du puits.

Une personne se place en un point E de la demi-droite [DA] de sorte que ses yeux soient alignés avec les points A et C. On note Y le point correspondant aux yeux de cette personne.

On sait que $\overline{AD}=1,5\,m$; $\overline{EY}=1,7\,m$ et $\overline{EA}=0,6\,m$.

Calculer $\overline{DC}$, la profondeur du puits.

Activité 8 Idem?

Soient M, N et P trois points alignés sur une droite d dans cet ordre, avec $\overline{MN}=5\text{cm}$ et $\overline{NP}=12\text{cm}$; soient S et T deux autres points n'appartenant pas à d et tels que S, N et T sont alignés dans cet ordre sur une droite d', avec $\overline{SN}=7.5\text{cm}$ et $\overline{NT}=18\text{cm}$

1. Soit d_{MS} la droite passant par M et S et d_{PT} la droite passant par P et T. Ces deux droites sont-elles parallèles?

2. Soit d_{MT} la droite passant par M et T et d_{PS} la droite passant par P et S. Ces deux droites sont-elles parallèles?

3. Quel est le théorème utilisé pour répondre à ces questions?

A savoir 1 Figures en géométrie

Le mot « géométrie » vient du grec *gê*, la terre et *metron*, mesure

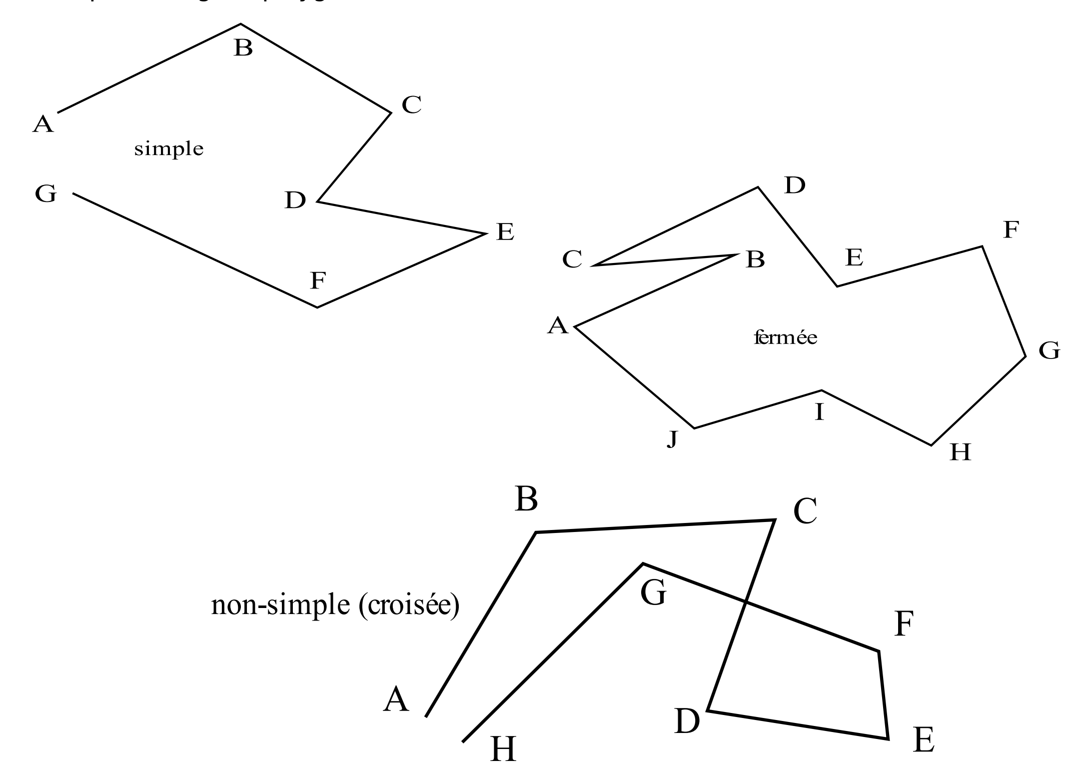
On ne peut pas représenter un objet géométrique exactement (comment dessiner sur une page une ligne qui n'a qu'une longueur et pas de largeur?). On se contente donc de représenter ces objets sous forme de **figure** ou de **schéma**, qui nous proposent une représentation approximative d'une réalité géométrique idéale (qu'est-ce qu'un point?). On ne peut donc jamais être certain d'une propriété géométrique à partir d'un tel schéma, sauf si une légende explicite (« Ci-dessous un carré ...») ou des codages particuliers (par exemple pour indiquer un angle droit ou des segments de mêmes longueurs) nous l'autorisent. Il s'agit de déduire ces propriétés à partir des informations connus. Par exemple, si on nous dit qu'on a affaire à un triangle isocèle (soit par définition un triangle qui a deux côtés égaux), on ne peut pas utiliser le fait qu'il a deux angles égaux seulement parce qu'on le « voit »; il faut le démontrer .

A savoir 2 Lignes et longueurs, surfaces et aires

Définitions

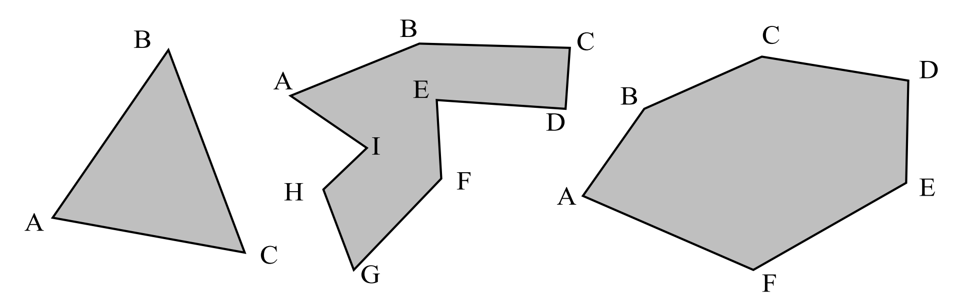
- ☐ Une **ligne polygonale** est une ligne formée uniquement de **segments** de **droites**.
- ☐ Les extrémités des segments sont appelés les **sommets** de la ligne polygonale.
- ☐ Une ligne polygonale est dite **fermée** si chacun de ses sommets est l'extrémité de deux segments.
- ☐ Une ligne polygonale est dite **simple** si deux segments non-consécutifs n'ont jamais de point commun.

Exemples de lignes polygonales



☐ Un **polygone** est une figure géométrique. C'est une partie finie du plan délimitée par un ligne polygonale fermée simple.

Exemples de polygones



Définitions

☐ Les sommets de la ligne polygonale sont les **sommets du polygone** et les segments qui composent cette ligne polygonale sont les **côtés du polygone**.

☐ Un polygone à 3 côtés est un **triangle.**

☐ Un polygone à 4 côtés est un **quadrilatère**

☐ Un **trapèze** est un quadrilatère possédant au moins une paire de côtés parallèles.

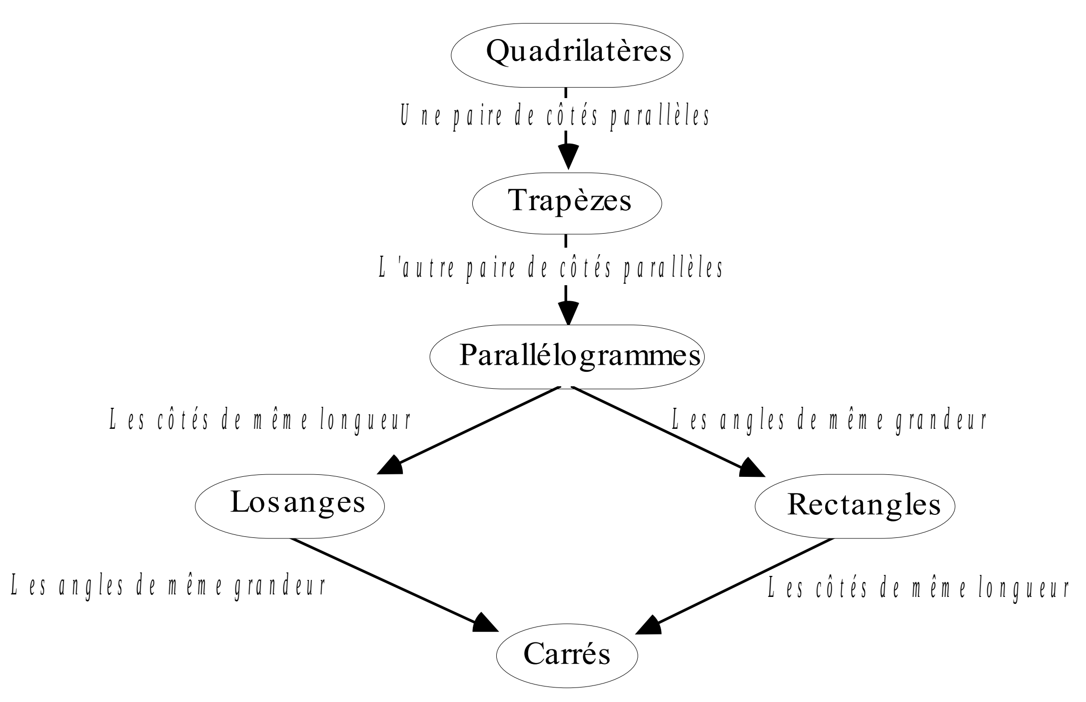
☐ Un **parallélogramme** est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles.

☐ Un **losange** est un parallélogramme dont les côtés sont de même longueur.

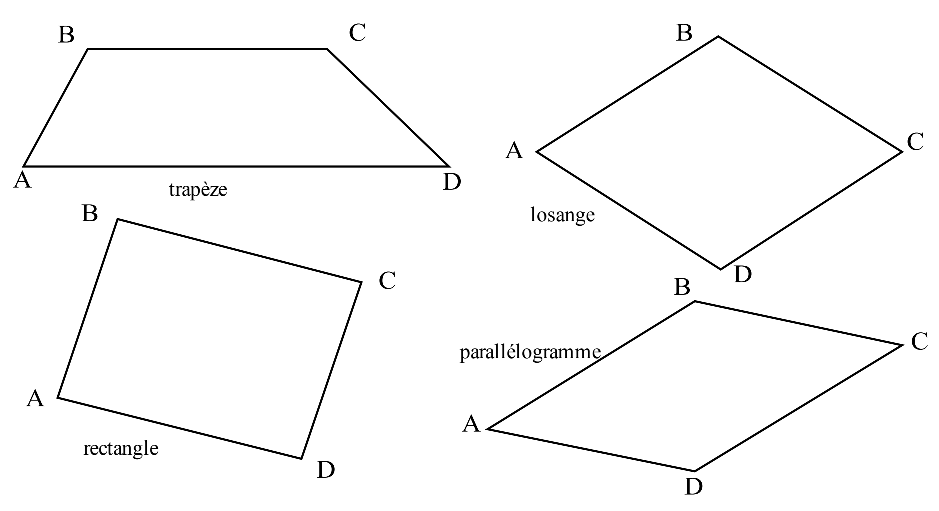
☐ Un **rectangle** est un parallélogramme dont les angles sont de même grandeur.

☐ Un **carré** est un rectangle dont les côtés sont de même longueur.

Le schéma ci-dessous montre la classification des quadrilatères en fonction de leurs caractéristiques:



Exemples de quadrilatères



Définitions

- ☐ Un polygone à 5 côtés est un **pentagone**.
- ☐ Un polygone à 6 côtés est un **hexagone**.
- ☐ Un polygone à 8 côtés est un **octogone**.
- ☐ Un polygone à 10 côtés est un **décagone**.
- ☐ Un polygone à 12 côtés est un **dodécagone**.
- ☐ Le **périmètre** d'une figure géométrique est la longueur de la ligne qui délimite cette figure.
- ☐ **L'aire** d'un figure géométrique est la mesure de la **surface** occupée par cette figure.

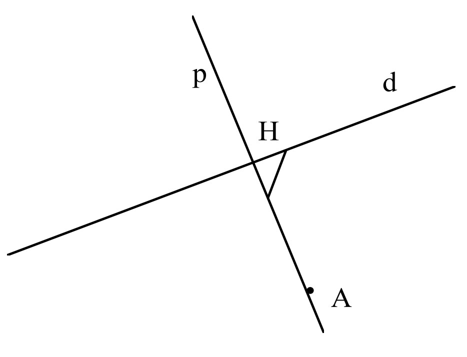
Définition « distance d'un point à une droite »

Soit un point A et une droite d.

Pour trouver la distance de A à d, que l'on note d(A,d), on commence par tracer la droite p, perpendiculaire à d et passant par A, puis on nomme H le point d'intersection de d et p.

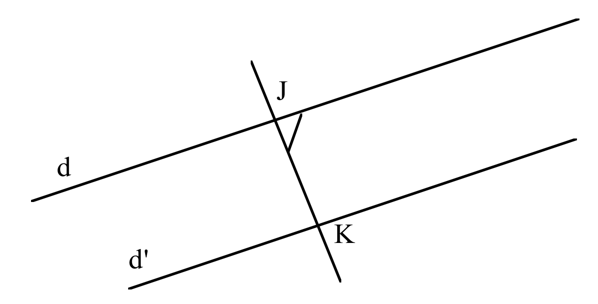
La **distance de A au point H** est notée $\overline{AH}$

On définit: la distance de A à d est égale à $\overline{AH}$ et on écrit: $d_{(A,d)}=\overline{AH}$



Définition « distance entre deux droites »

Pour déterminer la distance entre deux droites parallèles, on trace une droite perpendiculaire à ces deux droites et on mesure la longueur du segment défini par les points d'intersections des parallèles avec la perpendiculaire.



On définit: la distance entre d et d' est égale à $\overline{JK}$ et on écrit: $d_{(d,d')}=\overline{JK}$

Vocabulaire

Attention de ne pas confondre les objets géométriques (segment, ligne, surface, ...) et leurs mesures, qui sont des nombres réels positifs:

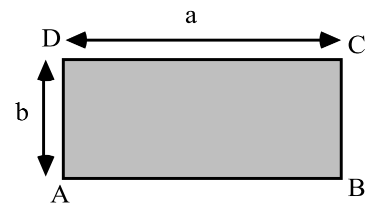
Dimension	Objet géométrique	Mesure
1	ligne	Longueur
2	surface	Aire
3	Volume	Volume (!)

Pour mesurer, il faut disposer d'une **unité de mesure**. SI celle-ci n'est pas explicite, on note parfois [u] pour une longueur, [u^2] pour une aire, ...

Axiome « aire d'un rectangle »

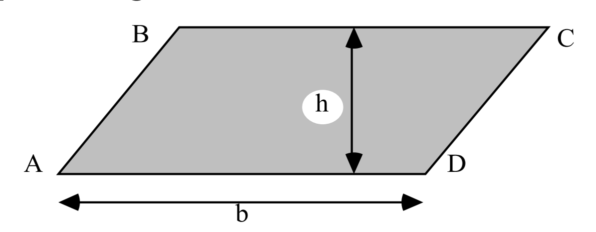
Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement a et b. Nous admettrons que l'aire d'un tel rectangle est égale à a fois b.

Aire du rectangle ABCD : $A=a \cdot b$



Nous pouvons trouver l'aire des autres polygones en n'utilisant que la formule ci-dessus et la définition des polygones (ainsi que quelques astuces pour transformer ces figures en rectangles !).

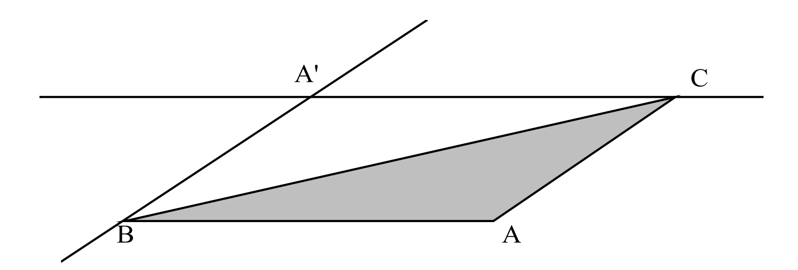
Théorème « aire d'un parallélogramme »



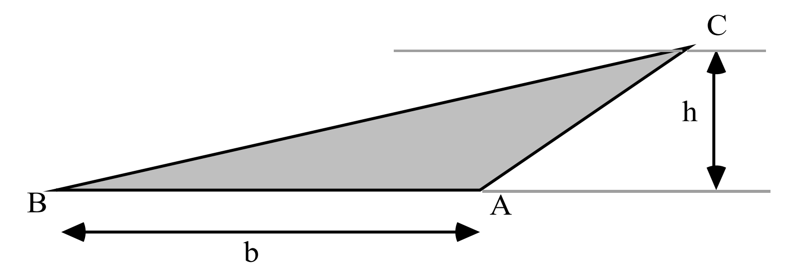
Aire du parallélogramme ABCD : $A=\text{base} \cdot \text{hauteur}=b \cdot h$

Théorème « aire d'un triangle »

Un triangle est toujours la moitié d'un certain parallélogramme:



D’où on peut prouver que:



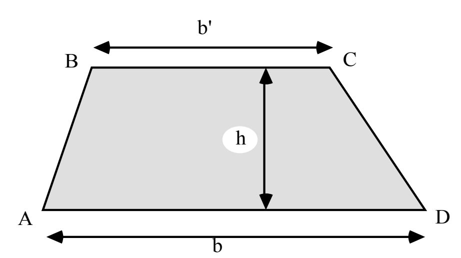
Aire du triangle: $A=\frac{\text{base}\cdot\text{hauteur}}{2}=\frac{b\cdot h}{2}$

Ici, la hauteur est la distance d'un sommet à la droite supportant le côté opposé (appelé **base**).

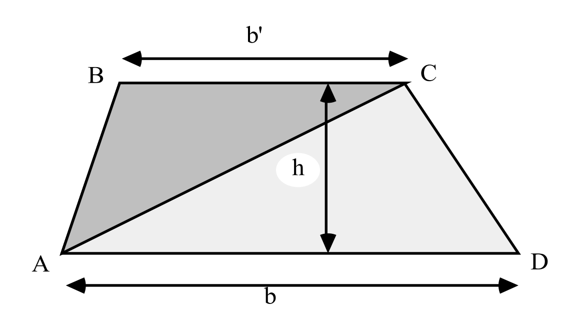
Théorème « aire d'un trapèze »

On peut montrer que l'on peut toujours considérer un trapèze comme formé de deux triangles.

Soit le trapèze ABCD. Ses deux côtés parallèles sont appelés les **bases** et la distance entre les bases est la **hauteur** du trapèze.



On trace une diagonale du trapèze. Elle détermine deux triangles de même hauteur. Chacune des bases du trapèze sert de base à l'un des triangles.



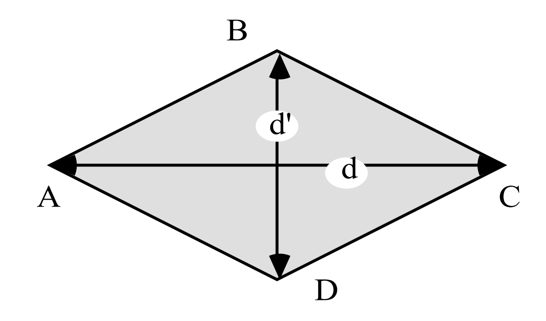
Donc l'aire du trapèze ABCD est égale à la somme des aires des triangles ABC et ACD, càd

$$\frac{b \cdot h}{2} + \frac{b' \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h + b' \cdot h}{2} = \frac{(b + b') \cdot h}{2}$$

Finalement,: Aire du trapèze : $A = \frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2} = \frac{(b+b') \cdot h}{2}$

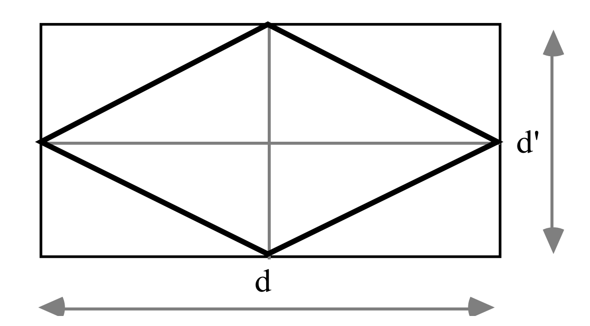
Théorème « aire d'un losange »

Soit le losange ABCD. Les segments AC et BD sont les diagonales du losange



Pour déterminer l'aire d'un losange, on peut le considérer comme constitué de 4 triangles égaux.

Mais il est plus simple de le voir inscrit dans un rectangle comme dans la figure ci-contre : on "voit" alors que l'aire du losange vaut la moitié de celle du rectangle, càd



Aire du losange ABCD : $A = \frac{d \cdot d'}{2}$

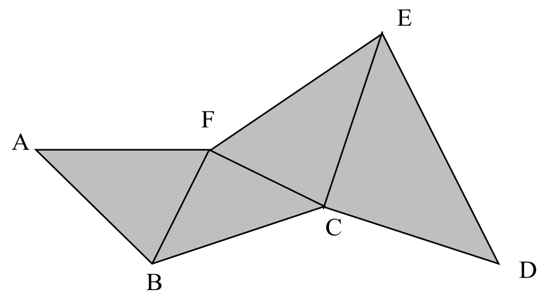
Remarque: nous parlerons du cercle de de son aire dans le chapitre 10.

Aire de polygones

Les aires des autres polygones s'obtiennent en "découpant" ces polygones en triangles et en faisant la somme des aires de ces triangles.

Exemple

Aire du polygone ABCDEF = aire du triangle ABF + aire du triangle BFC + aire du triangle CFE + aire du triangle CDE.

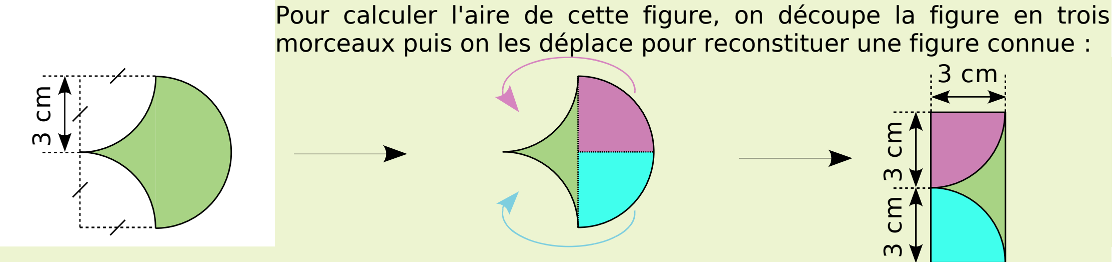


Remarque: attention, par contre, le périmètre du polygone ABCDEF n'est pas égal à la somme des périmètres des triangles qui le composent !!

Calculer une aire par découpage simple

Exemple 1 : calculer l'aire de la figure suivante :

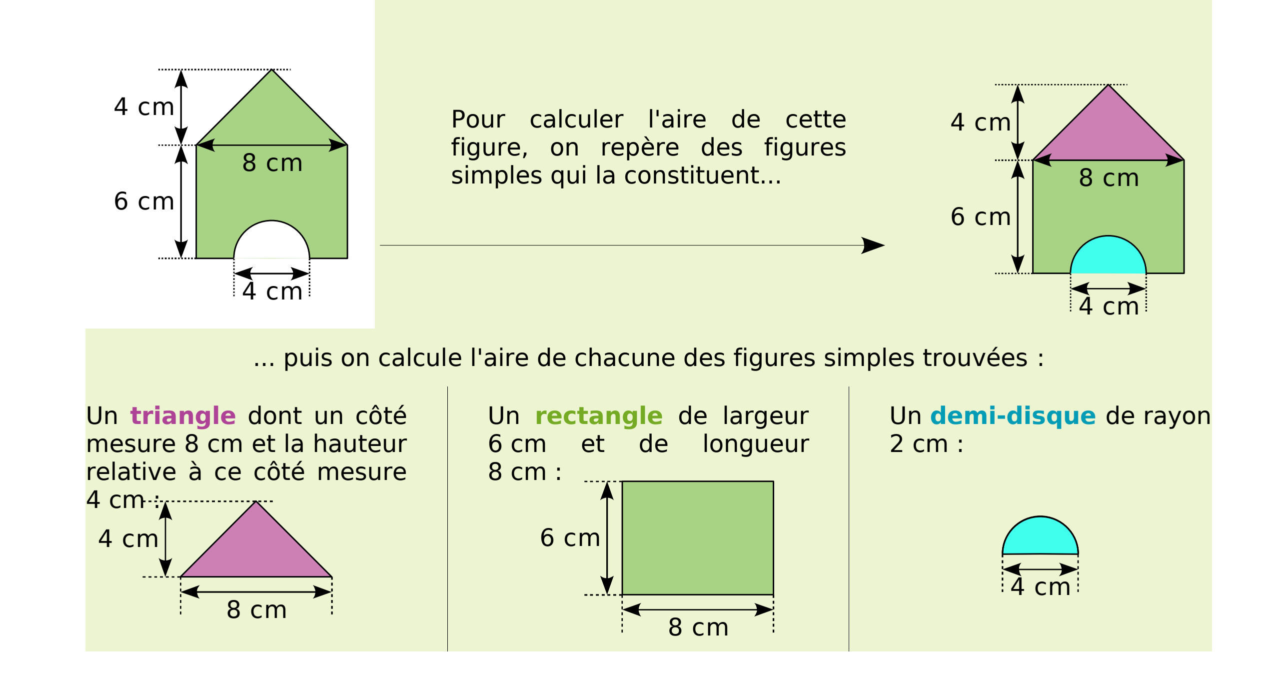
Pour calculer l'aire de cette figure, on découpe la figure en trois morceaux puis on les déplace pour reconstituer une figure connue :



Calculer l'aire de cette figure revient donc à calculer l'aire d'un rectangle de largeur 3 cm et de longueur 6 cm : A = 3 × 6 = 18.

L'aire de cette figure est 18 cm².

Exemple 2 : calculer l'aire de la figure suivante :



$A_T = \frac{4 \times 8}{2} = \frac{32}{2} = \mathbf{16}$	$A_R = 6 \times 8 = \mathbf{48}$	$A_D = \frac{\pi \times 2^2}{2} = \mathbf{2\pi}$

L'aire de la figure est obtenue en additionnant l'aire du **triangle** et l'aire du **rectangle** puis en retranchant au résultat l'aire du **demi-disque** :

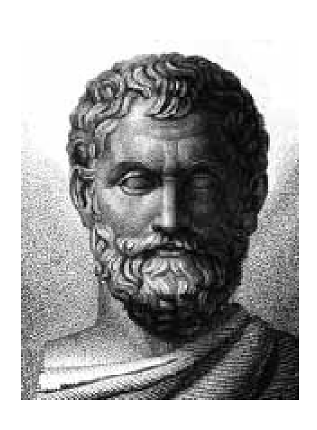
$$A = \mathbf{16} + \mathbf{48} - \mathbf{2\pi} = 64 - 2\pi$$

L'aire exacte de cette figure est $(64 - 2\pi)$ cm².

En prenant 3,14 comme valeur approchée du nombre π, on obtient $A \approx 57{,}72$ cm².

A savoir 3 Le temps des premiers îlots déductifs: Thalès

Aucun texte de Thalès ne nous est parvenu. Pour établir les grandes étapes de son existence comme de ses travaux nous devons nous appuyer sur les opinions qui furent rédigées parfois bien après sa mort. C'est ce qu'on appelle établir la doxographie d'un auteur ou d'une œuvre. Selon ces opinions Thalès serait né en 640 av. J.-C. dans la ville d'Ionie de Milet actuellement située sur la côte de la mer Égée en Turquie. Il serait mort entre 548 et 545 av. J.-C. dans la même ville de Milet dont il fut dit-on un conseiller politique influent. Il serait un des premiers si ce n'est le premier à chercher à fournir une explication naturelle aux phénomènes. Il aurait chercher à expliquer l'ensemble des phénomènes physiques à partir d'un élément premier et de ses transformations: l'eau. On le considère comme l'un des sept sages[2]. Il aurait effectué des voyages en Mésopotamie comme en Égypte et c'est de là qu'il aurait rapporté une partie de ses connaissances mathématiques.



Source: www-history.mcs.st-andrews. ac.uk



Source : www.math93.com

Il est connu pour avoir énoncé un certain nombre de résultats mathématiques dont le fameux théorème qui porte son nom.

2 Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Sept_sages

A savoir 4 Notions modernes de géométrie

Définitions

☐ Le **plan** peut être matérialisé par une surface plane dont les dimensions seraient infinies. Par exemple, une feuille de papier posée sur une table peut être considérée comme une petite portion de plan.

☐ On admet connaître les **points** qui sont les éléments du plan et les droites. Les points sont notés par des majuscules: *A*,*B*,*C*...

☐ Les **droites** sont notées par des minuscules: $d, d_1, d_2, ..$

☐ Deux droites sont **parallèles** si elles ne possèdent pas de point commun.

☐ Deux droites sont **sécantes** si elles ne possèdent un unique point commun.

☐ Une **demi-droite** est une partie infinie d'une droite, limitée par un point. Pour noter la demi-droite issue de A et passant par B, on note [AB).

☐ Un **segment de droite** est une partie finie d'une droite limitée par deux points appelés extrémités du segment. On note [AB] le segment qui relie les points A et B.

☐ Le nombre représentant la **longueur du segment** [AB] se note $\overline{AB}$ (ou parfois d(A,B), ou encore AB).

☐ Un **angle** est une partie infinie du plan limitée par deux demi-droites issues d'un même point appelé sommet de l'angle (en fait, une telle situation définit deux angles !).

☐ Un **angle plein** est un angle (non vide) construit à partir de deux mêmes demi-droites.

☐ Un **angle plat** est un angle construit à partir de deux demi-droites issues d'un même point et qui conjointement forment une droite.

☐ Soit un angle plat de sommet S. Si on coupe l'angle plat en deux parties égales avec une demi-droite issue de S, on obtient deux **angles droits**.

☐ Deux droites sont **perpendiculaires** si elles se coupent à angle droit.

Remarque: les droites, les demi-droites et les segments sont des lignes, alors que les angles sont des surfaces.

Mesure d'un angle

Nous utilisons le degré comme unité de mesure d'un angle, en choisissant qu'un angle plat mesure 180 degrés, ce qu'on note 180°.

Différence entre « angle » et « mesure d'un angle »

Un angle est une surface alors que sa mesure est un nombre. Il faudrait en principe, pour ne pas induire de confusion, adopter des notations différentes pour l'angle et pour sa mesure. Pourtant, afin de ne pas alourdir la notation, on note de la même façon un angle et sa mesure, à l'aide des minuscules grecques: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$

On dit alors par abus de langage que deux angles sont égaux s'ils ont la même mesure.

Mesures des angles particuliers

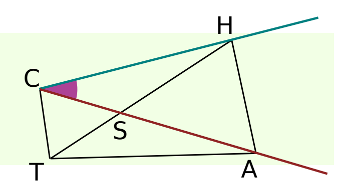
La mesure d'un angle droit α vaut 90° ; dans ce cas, on dira « alpha vaut 90° » et on $\alpha=90°$ écrira , parfois $\alpha=90$ pour simplifier. La mesure d'un angle plein vaut 360°.

Nommer un angle

Exemple**:** Nommer l'angle marqué en violet sur la figure ci-dessous.

Le sommet de l'angle est le point C : c'est la lettre centrale et les côtés de l'angle sont les demi-droites [CH) et [CS) (ou [CA)).

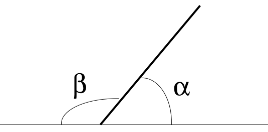
Cet angle peut se nommer : $\widehat{HCS}$ ou $\widehat{HCA}$



Remarque: on utilise aussi parfois la notation suivante $\widehat{HCS} = < HCS$ avec la convention suivante: la lettre du centre est le sommet de l'angle et on « tourne » dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Définition « angles supplémentaires »

Dans cette situation, où la somme des deux angles α et β est un angle plat, on dit que α et β sont **supplémentaires**.

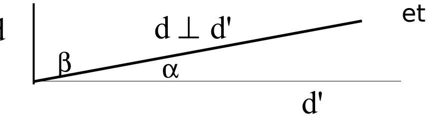


Théorème « angles supplémentaires »

Si deux angles α et β sont supplémentaires, alors $\alpha = 180 - \beta$

Définition « angles complémentaires»

Dans cette situation, où la somme des deux angles α et β est un angle droit, on dit que α et β sont **complémentaires**.

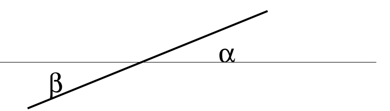


Théorème « angles complémentaires»

Si deux angles α et β sont complémentaires, alors $\alpha = 90 - \beta$

Définition « angles opposés»

Dans cette situation, où les deux droites sont sécantes, on dit que α et β sont **opposés**.

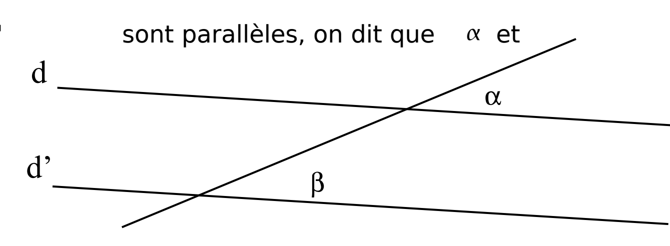


Théorème « angles opposés»

Si deux angles α et β sont opposés, alors $\alpha = \beta$

Définition « angles correspondants»

Dans cette situation, où les deux droites d et d' sont parallèles, on dit que α et β sont **correspondants**.

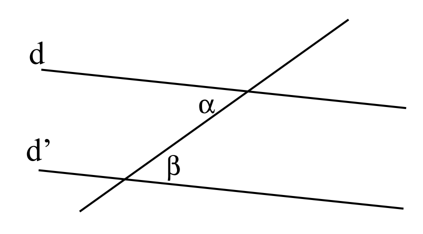


Axiome « angles correspondants»

Si deux angles α et β sont correspondants, alors $\alpha = \beta$

Définition « angles alternes-internes»

Dans cette situation, où les deux droites d et d' sont parallèles, on dit que α et β sont **alternes-internes**



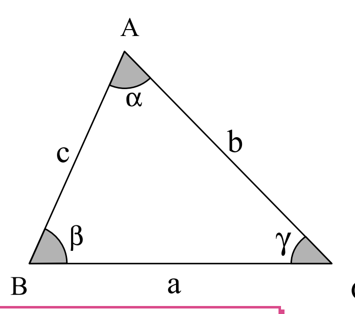
Théorème « angles alternes-internes»

Si deux angles α et β sont alternes-internes, alors $\alpha=\beta$

A savoir 5 Triangles

Définition

Des points du plan sont **colinéaires** si ils sont sur une même droite.



Notations

Un **triangle** de **sommets** A, B et C, où A, B et C sont des points non colinéaires du plan, est la réunion des segments de droites $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Ces trois segments sont appelés les **côtés du triangle**.

On note ce triangle ΔABC .

- ☐ α désigne l'angle de sommet A, noté <BAC; α désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ β désigne l'angle de sommet B, noté <ABC; β désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ γ désigne l'angle de sommet C, noté <BCA; γ désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ a est la longueur du côté opposé à l'angle α ; elle est aussi notée $\overline{BC}$
- ☐ b est la longueur du côté opposé à l'angle β ; elle est aussi notée $\overline{AC}$
- ☐ c est la longueur du côté opposé à l'angle γ ; elle est aussi notée $\overline{AB}$

Remarque: comme pour les angles et leurs mesures, on confond souvent les côtés et leurs longueurs. Un côté est un segment de droite, donc un objet géométrique, alors que sa longueur est un nombre. En principe, on devrait toujours prendre garde à les différentier en utilisant des notations spécifiques, mais comme souvent en mathématiques (voir précédemment avec les angles...), une fois qu'on a compris ces différences, on a tendance à simplifier et à utiliser la même notation pour des objets différents.

Définition « triangles particuliers »

- ☐ Un triangle est **isocèle** si deux de ses côtés sont de longueurs égales.
- ☐ Un triangle est **équilatéral** si ses trois côtés sont de longueurs égales.
- ☐ Un triangle est **rectangle** si un de ses angles est droit.

Théorème « relation entre les angles d'un triangle »

Si Δ ABC est un triangle, alors la somme de ses angles vaut 180°

Exemple : le triangle $\triangle PAF$ est tel que $\widehat{PAF} = 67°$ et $\widehat{FPA} = 56°$. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PFA}$?

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.
$\widehat{PAF} + \widehat{FPA} = 67° + 56° = 123°$.
$\widehat{PFA} = 180° - 123° = 57°$.
Donc l'angle $\widehat{PFA}$ mesure 57°.

Théorème « cercle de Thales »

Si $\triangle ABC$ est un triangle, alors la somme de ses angles vaut 180°

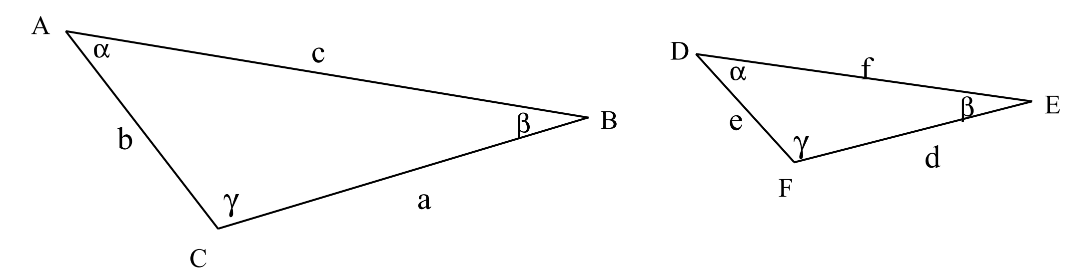
Définition « triangles semblables»

Deux triangles sont **semblables** s'ils ont les mêmes angles.

Notation: pour indiquer que $\triangle ABC$ et $\triangle DEF$ sont semblables, on écrit : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Définition « côtés correspondants dans des triangles semblables»

Soit $\triangle ABC$ et $\triangle DEF$ deux triangles semblables :



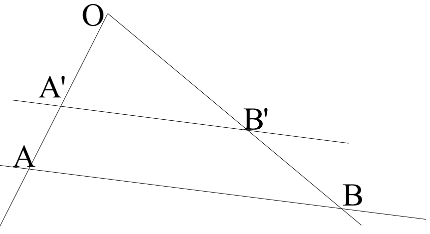
On dit que les côtés c et f sont des **côtés correspondants,** car ils sont opposés à un même angle, en l'occurrence l'angle γ :

de même, les côtés a et d sont des **côtés correspondants, (**car opposés à α) et les côtés b et e sont des côtés correspondants (car opposés à β).

A savoir 6 ThéorèmeS de Thales

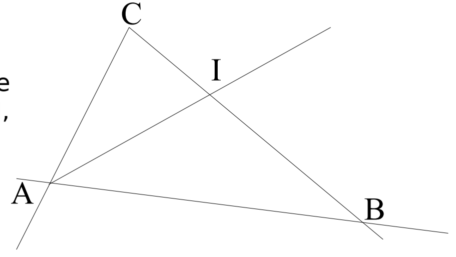
Théorème

Si on trace, dans un triangle ΔOAB, une droite quelconque parallèle à [AB] coupant [OA] en A' et [OB] en B', alors on a: $\text{Aire}(\Delta ABB')=\text{Aire}(\Delta ABA')$



Théorème «Aires égales»

Si on trace, dans un triangle ΔABC, une demi-droite quelconque issue de A et coupant le segment [BC] en I, alors on a: $\frac{\text{Aire}(\Delta ABI)}{BI}=\frac{\text{Aire}(\Delta ACI)}{IC}$



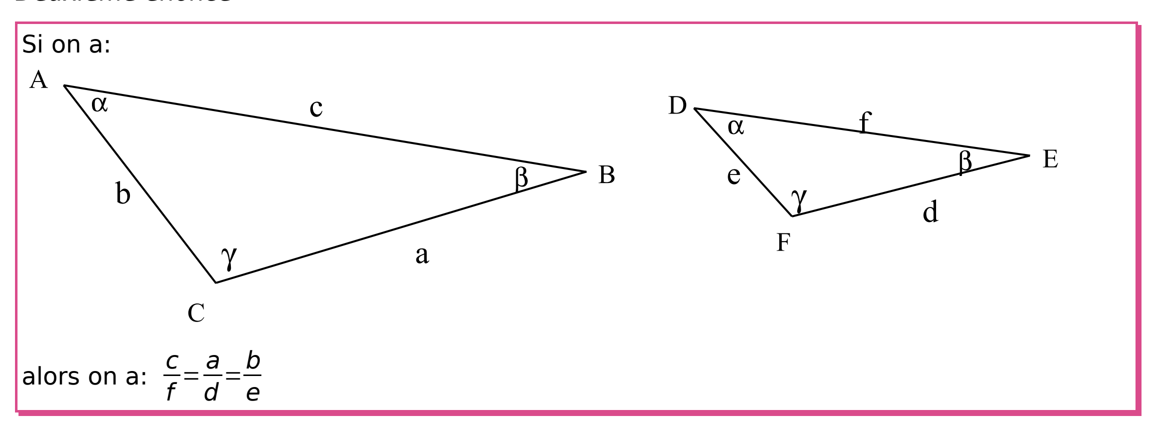
Théorème « Thalès »

Premier énoncé

Si ΔABC et ΔDEF sont deux triangles semblables, alors ils ont leurs côtés correspondants proportionnels

Deuxième énoncé

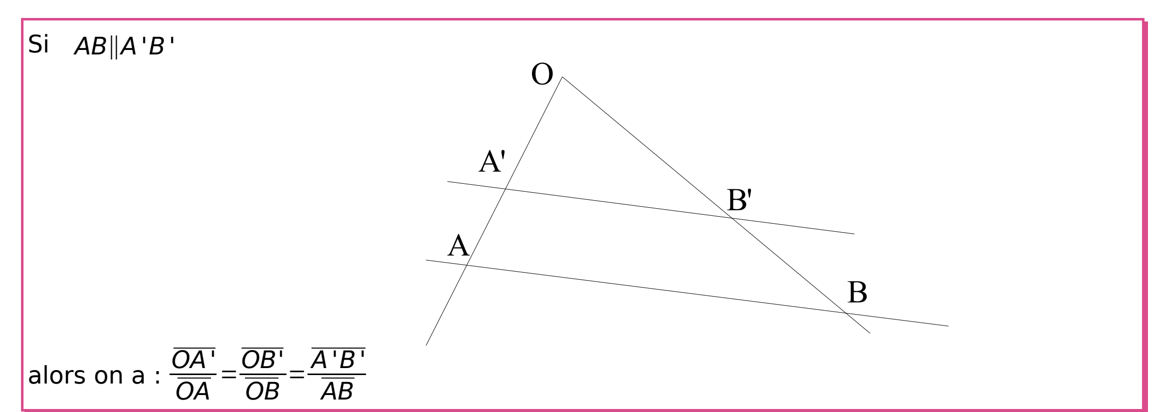
Si on a:



alors on a: $\frac{c}{f}=\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$

Applications du Théorème « Thales »

Si $AB \| A'B'$



alors on a : $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}$

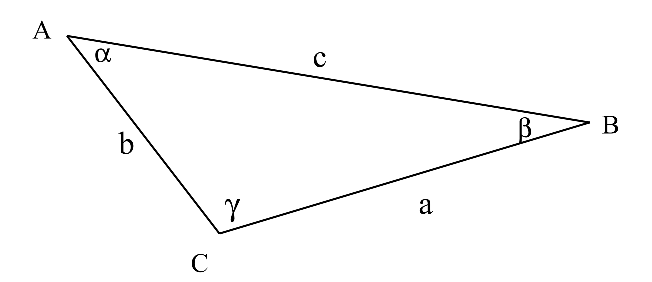
Théorème « réciproque du théorème de Thales »

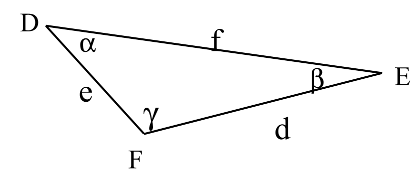
Premier énoncé

Si deux triangles ont leurs côtés correspondants proportionnels, alors ils sont semblables

Deuxième énoncé

Si on a les égalités suivantes $\frac{c}{f}=\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$ dans la situation ci-dessous :





alors on a: a = d b = e et g = w

Théorème « Thales équivalence »

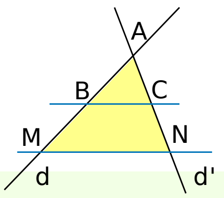
Lorsqu'un théorème et sa réciproque sont tous deux vrais, on peut écrire les choses ainsi :

ΔABC et ΔDEF sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont leurs côtés correspondants proportionnels

A savoir 7 Utiliser Thales

Calculer une longueur

Exemple: sur la figure ci-contre, les droites d_{BC} et d_{MN} sont parallèles. AB = 3 cm ; AN = 4 cm et AM = 7 cm. Calculer la longueur AC.

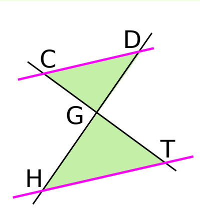


Les droites d_{BM} et d_{CN} sont sécantes en A.
Les droites d_{MN} et d_{BC} sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$, soit $\frac{3}{7}=\frac{AC}{4}=\frac{BC}{MN}$.

On utilise la propriété des produits en croix pour calculer la longueur demandée.

Calcul de AC : $7 \times AC = 3 \times 4$ soit $AC=\frac{3\times 4}{7}=\frac{12}{7}$ donc $AC=\frac{12}{7}$ cm.

Exemple: sur la figure ci-contre, les droites d_{CD} et d_{HT} sont parallèles. On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm. Calculer GT et CD.



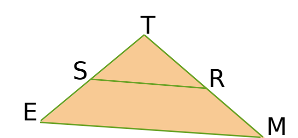
Les droites d_{DH} et d_{CT} sont sécantes en G.
Les droites d_{CD} et d_{HT} sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{GC}{GT} = \frac{GD}{GH} = \frac{CD}{HT}$, soit $\frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$.

Calcul de GT : $25 \times GT = 45 \times 20$.
$GT = \frac{45 \times 20}{25}$
donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : $25 \times 27 = 45 \times CD$.
$CD = \frac{25 \times 27}{45}$
donc CD = 15 mm.

Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Exemple**:** sur la figure ci-contre, TR = 11 cm ; TS = 8 cm ; TM = 15 cm et TE = 10 cm.
Montrer que les droites d_{RS} et d_{ME} ne sont pas parallèles.



Les droites d_{ES} et d_{MR} sont sécantes en T.

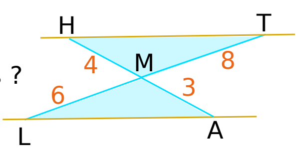
D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$.

D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$.

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$. Or, si les droites d_{RS} et d_{ME} étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites d_{RS} et d_{ME} ne sont pas parallèles.

Montrer que deux droites sont parallèles

Exemple **:** les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$.

D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$. De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

Remarque importante: il s'agit donc de bien être au clair quant au théorème que l'on est en train d'utiliser: soit le théorème de Thalès, soit sa réciproque!

Les arpenteurs égyptiens

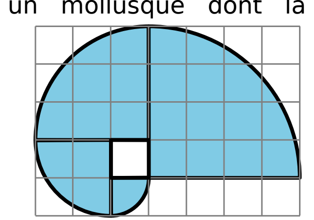
1 Lire et commenter le texte suivant qui présente la manière dont le scribe Ahmôse calcule l'aire d'un disque. Généraliser la procédure en justifiant votre réponse. Quelle valeur le scribe emploie pour le rapport de l'aire du disque et celle du carré construit sur le rayon ?

Ahmôse (1788-1580 av. J.-C.)
Exemple de calcul d'un champ rond de 9 khet.
De combien est la surface de ce champ ?
Tu soustrairas son neuvième qui est 1,
il reste 8.
Tu feras en sorte de multiplier 8 fois 8.
Il advient 64.
Ceci est la surface du champ, à savoir 64 aroures.

R. 50, in : Couchoud S., Mathématiques égyptiennes, pp. 61-62

Aires

2 Le nautile est un mollusque dont la coquille est spiralée et peut être schématisée de la manière suivante :



a. Calculer l'aire de la figure.

b. Calculer le périmètre de cette figure.

3 À Mathcity, l'émetteur de « radio-centre » a une portée de 10 km.

a. Calculer la superficie de la zone de réception au km² près.

b. À partir du mois de septembre prochain, le conseil municipal instaure une taxe de 10 € par km². Combien paiera « radio-centre » ?

c. La direction prévoit de changer l'émetteur pour multiplier la portée par 3. La nouvelle taxe sera-t-elle aussi multipliée par 3 ?

4 Un pare-brise rectangulaire de 1,50 m sur 0,80 m est balayé par un essuie-glace de longueur 0,65 m. Trouver une valeur approchée du pourcentage de la surface balayée par rapport à celle du pare-brise.

Cercle de Thalès

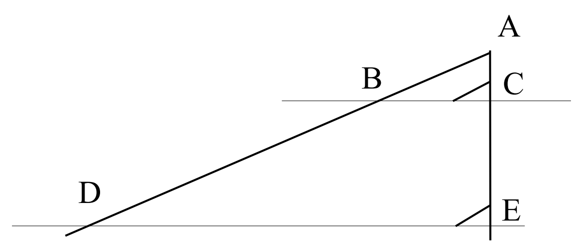
5 Interpréter et illustrer le texte suivant pour en extraire un théorème fort connu; l'énoncer en langage moderne et le démontrer:

Thalès A 1 : Diogène Laërce (IIIe s. ap. J.-C.)
(...). Aristote et Hippias déclarent qu'il < Thalès > confère aussi une âme aux êtres inanimés, en se fondant sur les propriétés de la pierre magnétique et de l'ambre. A ce que déclare Pamphila, il fut le premier, après avoir été, en géométrie, l'élève des Egyptiens, à avoir inscrit dans un cercle le triangle rectangle, et sacrifia un bœuf en l'honneur de cette découverte.

Remarque: pour d'autres, parmi lesquels l'arithméticien Apollodore, le mérite en revient à Pythagore. (...). (Vies, I, 24-25, in : Dumont, p. 12)

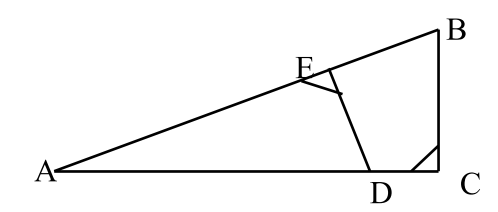
Triangles

6 On suppose que: $[BC] \parallel [DE]$ et <BCA=90° et <DEC=90°



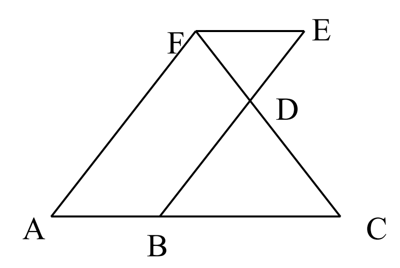
Identifier les triangles semblables et les côtés correspondants.

7 On suppose que <DEA=90° et <ACB=90°



Identifier les triangles semblables et les côtés correspondants.

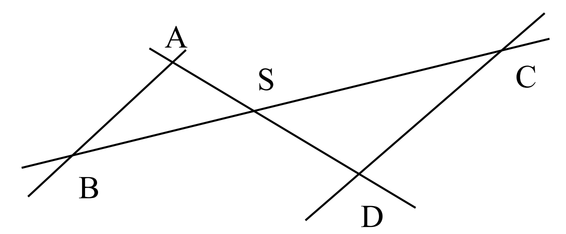
8 On suppose que: $[BE] \parallel [AF]$



Identifier les triangles semblables et les côtés correspondants.

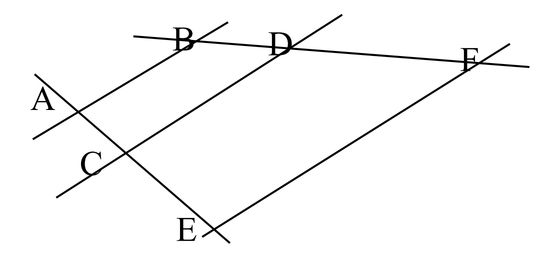
Exercices d'entraînement

9 On suppose que $[AB]|||[CD]$,
$\overline{AB}=72$, $\overline{CD}=96$, $\overline{SC}=84$ et $\overline{SD}=72$



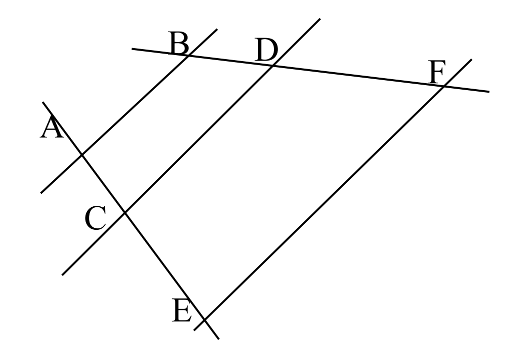
Trouver $\overline{SA}$ et $\overline{SB}$

10 On suppose que $[AB]|||[CD]$,
$[AB]|||[EF]$, $\overline{AC}=10$, $\overline{CE}=15$ et $\overline{BD}=14$



Trouver $\overline{DF}$.

11 On suppose que $[AB]|||[CD]$, $[AB]|||[EF]$,
$\overline{AB}=14$, $\overline{AC}=28$, $\overline{CE}=21$, $\overline{BD}=36$ et $\overline{EF}=35$



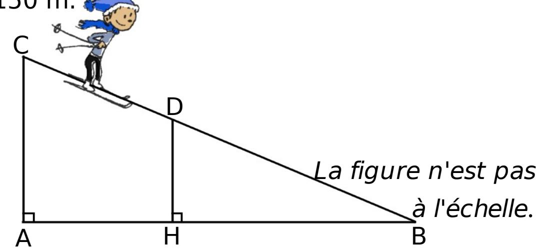
Trouver $\overline{DF}$ et $\overline{CD}$

12 Un triangle ΔSEL est tel que $\overline{SE}=6\,cm$, $\overline{EL}=4\,cm$ et $\overline{SL}=3\,cm$. Le point I est le point de la demi-droite [LS) tel que $\overline{SI}=5{,}1\,cm$. La parallèle à la droite d_{EL} passant par I coupe d_{ES} en X. Calculer les longueurs $\overline{SX}$ et $\overline{IX}$.

13 Soit ΔPEM un triangle. A est un point du segment [PE] et B est un point du segment [PM] tels que $\overline{BM}=30\,cm$; $\overline{AB}=30\,cm$; $\overline{ME}=50\,cm$. Les droites d_{AB} et d_{ME} sont parallèles. À l'aide du théorème de Thalès, on obtient $\overline{PM}=45\,cm$. Vrai ou faux ? Expliquer la démarche.

14 Un skieur dévale, tout schuss, une piste rectiligne représentée ci-dessous par le segment [BC] de longueur 1 200 m.

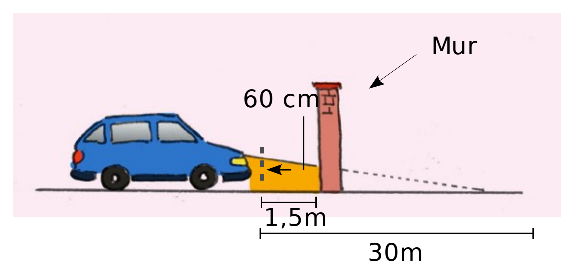
À son point de départ C, le dénivelé par rapport au bas de la piste, donné par la longueur AC, est de 200 m. Après une chute, le skieur est arrêté au point D sur la piste. Le dénivelé, donné par la longueur DH, est alors de 150 m.



Calculer la longueur DB qu'il lui reste à parcourir.

15 Les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit par temps clair, sur une distance minimale de 30 m.

Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Jacques veut tracer un repère sur le mur au fond de son garage.



Les feux de croisement sont à 60 cm du sol.

À quelle hauteur doit-il placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares ?

16 ABC est un triangle. D est un point de [AB] et E est un point de (AC) n'appartenant pas à [AC]. On donne AB = 4 cm ; AC = 3 cm ; AD = 1,2 cm et AE = 0,9 cm.

a. Alixien a écrit sur sa copie :

« *Les droites (EC) et (DB) sont sécantes en A.*

D'une part, $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1{,}2}{4}=\dfrac{12}{40}=\dfrac{3}{10}$.

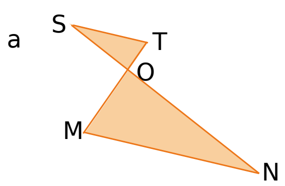
D'autre part, $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{0{,}9}{3}=\dfrac{9}{30}=\dfrac{3}{10}$.

Comme $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$, alors les droites (BC) et (ED) sont parallèles. »

Quel théorème Alixien a-t-il utilisé ?

b. La réponse d'Alixien est-elle juste ? Sinon, rédiger la bonne réponse.

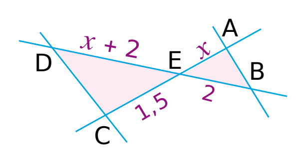
17 On a OM = 2,8 cm ; ON = 5,4 cm ; OS = 2,7 cm et OT = 1,4 cm.



Démontrer que les droites (MN) et (ST) sont parallèles.

18 L'unité de longueur choisie est le mètre.

a. Pour $x = 2,5$, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Vrai ou faux? Expliquer la démarche.



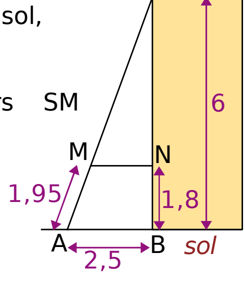
b. Pour $x = 1$, les droites (AB) et (DC) ne sont pas parallèles. Vrai ou faux ? Expliquer la démarche.

19 Pour consolider un bâtiment, des charpentiers ont construit un contrefort en bois (les mesures sont en mètre).

a. En considérant que le montant [BS] est perpendiculaire au sol, calculer la longueur AS.

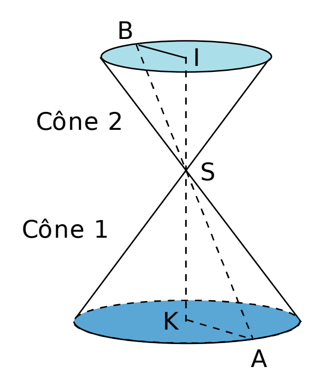
b. Calculer les longueurs SM et SN.

c. Démontrer que la traverse [MN] est bien parallèle au sol.



Exercices supplémentaires

20 Les deux cônes de révolution de rayons KA et IB sont opposés par le sommet.



Les droites (AB) et (KI) se coupent en S, et de plus (BI) et (KA) sont parallèles.

On a KA = 4,5 cm ; KS = 6 cm et SI = 4 cm.

Calculer BI.

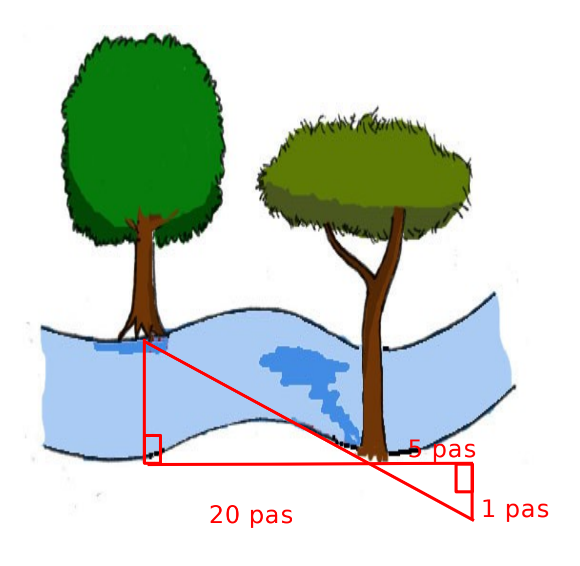
21 EURO est un parallélogramme tel que EO = 5 cm et OR = 6 cm.

Le point P est le point de (OE) qui n'appartient pas à [OE] tel que EP = 3 cm. La droite (PR) coupe [EU] en A.

Calculer les longueurs EA et AU.

22 Par un beau dimanche ensoleillé, Julien se promène au pied de la montagne Sainte Victoire au bord de la rivière Arc.

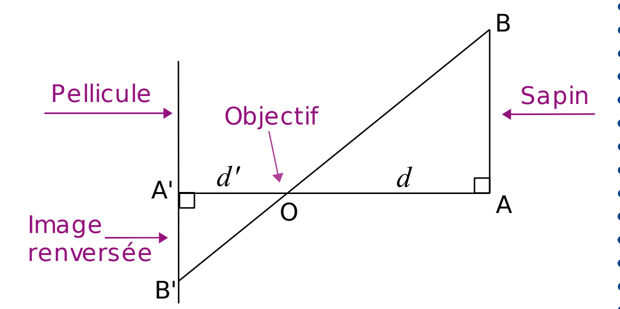
Il se demande quelle est la largeur de cette rivière. Il prend des repères, compte ses pas et dessine le schéma ci-dessous.



a. Quelle est, en nombre de pas, la largeur de la rivière qu'obtient approximativement Julien?

b. Julien estime que la longueur de son pas est environ de 65 cm. Donner une valeur approximative de la largeur de cette rivière au centimètre près.

23 Voici un schéma du fonctionnement d'un appareil photographique argentique : un objet [AB] situé à une distance d de l'objectif O a une image [A'B'] située à une distance d' de O.



a. Démontrer que les droites d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont parallèles.

b. Démontrer l'égalité : $\frac{d}{d'} = \frac{AB}{A'B'}$.

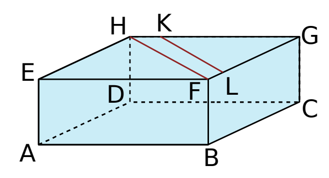
c. Pour un certain appareil, $d' = 50$ mm. Un sapin d'une hauteur de 12 m se trouve à 15 m de l'objectif. Quelle est la hauteur de l'image qui se forme sur la pellicule ?

24 ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 12 cm et AC = 8 cm.

Le point F est le point du segment [AC] tel que AF = 4 cm et le point E est le point de [AB] tel que AE = 6 cm.

Démontrer que la droite d_{EF} est parallèle à la droite d_{BC}.

25 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 7 cm ; AD = 3 cm et AE = 2,5 cm.



Le point K appartient à l'arête [GH] et le point L appartient à l'arête [GF].

On donne GK = 6 cm et GL = 2,6 cm.

Les droites d_{KL} et d_{HF} sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Réponses des exercices supplémentaires

20 IB = $\frac{4{,}5 \times 4}{6}$ = 3 cm.

21 AE = 2,25 cm; AU = 3,75 cm.

22

a. La largeur de la rivière est de 4 pas.

b. La largeur de la rivière est donc d'environ 260 cm.

23

a. Les droites d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont perpendiculaires à la même droite $d_{AA'}$ donc elles sont parallèles entre elles.

b. Les droites $d_{AA'}$ et $d_{BB'}$ sont sécantes en O.

Les droites d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{d}{d'} = \frac{AB}{A'B'}$.

a. L'image qui se forme sur la pellicule a une hauteur de 40 mm.

24 Dans le triangle ABC, F est le milieu de [AC] et E est le milieu de [AB].

Or, dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc d_{EF} et d_{BC} sont parallèles.

25 Les points G, K, H d'une part et G, L, F d'autre part sont alignés dans le même ordre.

D'une part, $\frac{GL}{GF} = \frac{2{,}6}{3} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$.

D'autre part, $\frac{GK}{GH} = \frac{6}{7}$.

On constate que $\frac{GL}{GF} \neq \frac{GK}{GH}$.

Or, si les droites d_{KL} et d_{HF} étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité. Comme ce n'est pas le cas, les droites d_{KL} et d_{HF} ne sont pas parallèles.

Elle (la géométrie) est, pour ainsi dire, la mesure la plus précise de notre esprit,

de son degré d'étendue, de sagacité, de profondeur, de justesse.

Jean le Rond d' Alembert

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ différentier l'objet géométrique (angle, segment, surface) de sa mesure (un nombre positif: longueur, aire) en utilisant des notations appropriées
- ✔ statut d'une figure, d'un schéma en mathématiques : on représente approximativement une réalité idéale; attention de ne pas en tirer de conclusions hâtives ...
- ✔ où, quand, quoi ?
  - ✔ "naissance" de la géométrie en Égypte, au bord du Nil, sur des bases déjà présentes en Mésopotamie, puis développement dans le bassin méditerranéen et émergence de la construction mathématique et de la démonstration
  - ✔ personnage historique : Thalès
- ✔ figures du plan (carré, rectangle, losange, ...) et calculs d'aires
- ✔ notions fondamentales : point, plan, droite
- ✔ définitions et notations des objets géométriques de base du plan: droites, demi-droites, angles, segments, triangles
- ✔ pour les triangles : sommets, côtés, longueurs des côtés
- ✔ angles particuliers : angles plats, pleins, droits, supplémentaires, complémentaires, opposés, correspondants, alternes-internes
- ✔ triangles particuliers : isocèle, équilatéral, rectangle
- ✔ triangles semblables, côtés correspondants

Savoirs-faire

- ✔ calculer des aires simples et par découpages
- ✔ théorèmes à savoir énoncer et démontrer: Thm « AnOpp », Thm « AnALT-INT », Thm « 180 », Thm « cercle de Thalès », 2x Thm « Aires triangle », Thm « Thal»
- ✔ théorème à savoir énoncer et acceptés sans démonstration: Thm « RecTha »
- ✔ résoudre des problèmes de géométrie à l'aide des outils disponibles, en particulier avec le théorème de Thales et sa réciproque
- ✔ interpréter des textes historiques en suivant les calculs proposés

Chapitre 9 - De Pythagore à Euclide

Voir aussi le complément «Constructions à la règle et au compas»[1]



L'école d'Athènes, par Raffael (1511)

Problème

Combien de fois se répète le dernier chiffre de 627! à la fin de ce nombre?

Source principale pour les éléments historiques: Martin Cuénod (DIP-GE)

1 En téléchargement libre à l'adresse http://sesamath.ch/manuel-degre12

Activité 1 D'où vient ce théorème connu?

Lire le texte ci-dessous:

Ecole pythagoricienne 21 : Euclide (environ 325-250)
« Quel que soit le triangle, quand on prolonge l'un de ses côtés, l'angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs et opposés, et la somme des trois angles intérieurs du triangle est égale à deux droits. »
C'est aux Pythagoriciens que le péripatéticien Eudème fait remonter la découverte de ce théorème selon lequel tout triangle a ses angles intérieurs égaux à deux droits. (...)

Cité par Proclus - Commentaire sur le premier livre des Eléments d'Euclide, I, XXXII
Ed. Friedlein, 379, 2

a. Quel est le théorème dont il est ici question?

b. Qu'est-ce qu'un « péripatéticien »?

Activité 2 LE théorème!

Les civilisations mésopotamiennes, avec leur système de numération sexagésimale de position, étaient bien outillées pour dégager des algorithmes algébriques. On considère du reste la Mésopotamie comme le berceau de l'« algèbre ». Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une tradition remontant aux Grecs fait en revanche de la civilisation égyptienne le lieu de naissance de la géométrie.

Euclide (environ 325-250)
« Dans un triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.»
Parmi les gens qui prétendent écrire l'histoire des temps anciens, il en est pour attribuer ce théorème à Pythagore et pour dire qu'il sacrifia un bœuf à l'occasion de cette découverte.

Cité par Proclus - Commentaire sur le premier livre des Eléments d'Euclide, I, XLVII
éd. Friedlein, 426, 6

a. Illustrer le texte par une figure explicative.

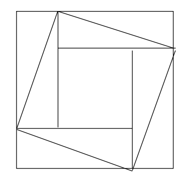
b. Enoncer le théorème de Pythagore en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s)

c. Visionner la démonstration suivante : http://www.kangmath.com/swf/pythagore.html

d. Enoncer la réciproque du Théorème de Pythagore.

e. Est-elle vraie ?

f. Une autre illustration (démonstration?), tout aussi visuelle, ne nécessite, quant à elle, qu'une seule figure. Elle se trouve dans le livre de Chou Pei Suan King (40 av. J.-C.):



L'expliciter!

Activité 3 Les pythagoriciens

Voir la présentation (pts 1 à 9): http://www.canal-educatif.fr/Video/Sciences/007Pythagore/player.html

a. Quand a vécu Pythagore?

b. Où a-t-il vécu?

c. Citer un mathématicien contemporain de Pythagore.

d. Pourquoi les mathématiques ont-elles commencé à se développer à Babylone?

e. Citer trois domaines auxquels Pythagore s'est intéressé.

f. Citer trois détails de sa vie qu'on peut qualifier de « particuliers ».

g. Pourquoi les Égyptiens se servaient de la corde à 13 noeuds?

h. Que signifie le mot « hécatombe »?

i. Comment s'appelle le livre considéré comme le livre majeur de la géométrie? Qui l'a écrit?

j. Comment s'appelle le symbole par lequel on pense que les Pythagoriciens se reconnaissaient?

k. Qu'est-ce que le disciple Hyppase de Métaponte a révélé au monde? Pourquoi cela a-t-il eu autant de répercussions chez les pythagoriciens?

Activité 4 Applications

Au XIIIe siècle, le fils d'un certain Bonacci, Léonard de Pise, dit Fibonacci, écrivit un livre expliquant aux marchands italiens les connaissances mathématiques découvertes et accumulées par les arabes. Dans ce « Livre des abaques », on trouve le problème suivant: « Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas. Entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours, au même instant, se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du ventre de la fontaine aux deux tours? ».

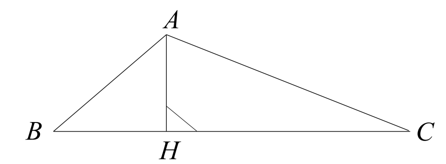
Activité 5 La crise des irrationnels

1. Voir la présentation (pts 19 à 24): http://www.canal-educatif.fr/Video/Sciences/007Pythagore/player.html

2. L'une des conséquences majeures du théorème de Pythagore est l'émergence de **grandeurs incommensurables** entre elles; qu'entend-t-on par là?

Activité 6 D'autres théorèmes

1. On considère le triangle ΔABC rectangle en A et on trace la hauteur issue du sommet A.



a. Montrer que les trois triangles ΔABC , ΔABH et ΔACH sont semblables

b. Déduire du point précédent la proportion suivante : $\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH}$

c. Cette proportion est connue sous le nom de **théorème de la hauteur**.
L'énoncer comme un théorème avec hypothèse(s) et conclusion(s).

d. En déduire les proportions suivantes : $\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB}$ et $\frac{AC}{CH}=\frac{BC}{AC}$

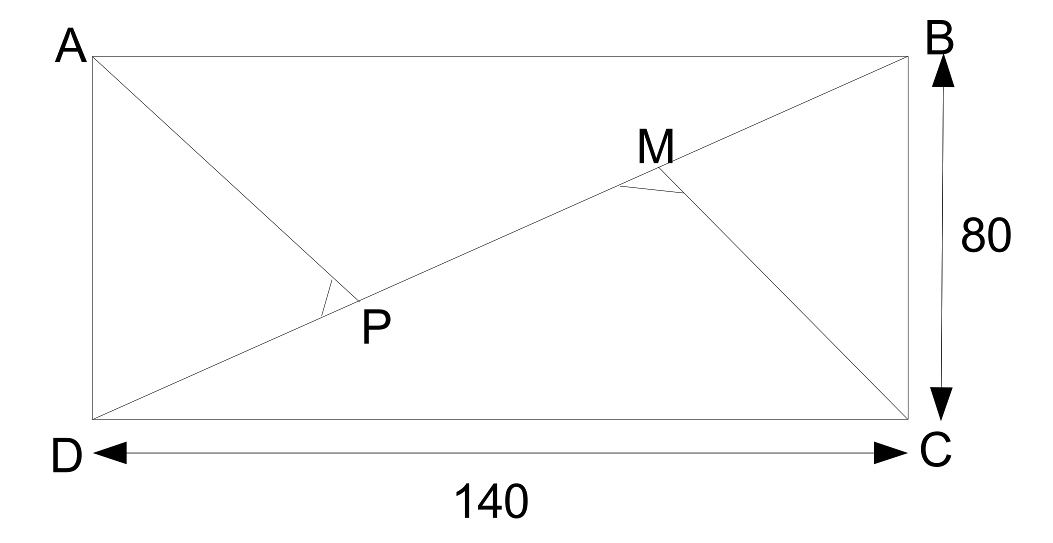
e. Ces deux proportions sont connues sous le nom de **théorème d'Euclide**. Les énoncer comme un théorème avec hypothèse(s) et conclusion(s).

f. Encore une démonstration! En s'aidant du théorème d'Euclide, montrez que $AB^2+AC^2=BC^2$

Activité 7 Un problème

1. Etablir une liste de la « boîte à outils » actuelle (déf/ax/thm) à notre disposition pour démontrer de nouveaux résultats.

2. Soit ABCD un rectangle.



Déterminer $\overline{MP}$ en justifiant toutes les étapes des calculs.

Activité 8 Euclide ou le temps des législateurs

Avec Euclide la géométrie entre dans une nouvelle ère. Les nombreux résultats géométriques accumulés au cours des siècles antérieurs au IVe siècle, et dont nous avons donné quelques exemples dans les activités et dans le chapitre précédents, ont exigé une structuration, une présentation rigoureuse afin de montrer les liens qui pouvaient les unir. On assiste, avec Euclide, à la première tentative d'organisation rationnelle d'un savoir, à la première tentative d'**axiomatisation**.

1. Vie d'Euclide

La personnalité d'Euclide nous est pratiquement inconnue. Quelques renseignements nous sont fournis par les *Commentaires* de Proclus, texte déjà cité et qui sert de référence historique :

> *Proclus (412-485)*
> Euclide n'est pas beaucoup plus jeune que ceux-là : en rassemblant les *Éléments*, il mit en ordre bon nombre de résultats d'Eudoxe et perfectionna beaucoup de ceux de Théétète, et de plus il éleva au niveau de démonstrations irréfutables ceux dont ses prédécesseurs n'avaient rendu compte que de façon assez relâchée. Cet homme vécut sous le premier Ptolémée : car Archimède, qui suivit de près le premier < Ptolémée > mentionne Euclide, et, notons-le, on raconte qu'un jour Ptolémée lui demanda s'il y avait pour la Géométrie un chemin plus court que l'ordre des *Éléments* : et lui de répondre qu'il n'y a pas, vers la Géométrie, de voie directe réservée aux rois. Il est donc plus jeune que les disciples de Platon, mais plus vieux qu'Eratosthène et Archimède. Ceux-ci sont en effet contemporains, comme le dit quelque part Eratosthène.

Commentaires au livre I des Eléments d'Euclide, in : Les Eléments, vol. 1, pp. 89-92)

a. Quels sont les personnages principaux du tableau « L'école d'Athènes » de Raffael (voir la page de garde du chapitre) et pourquoi sont-ils célèbres?

b. Se servir des informations ci-dessus, de celles déjà glanées au chapitre précédent et d'autres que vous trouverez sur Internet pour placer les personnages suivants sur cette chronologie: Euclide, Thales, Pythagore, Théétète, Proclus, Eudoxe Archimède, Eratosthène, Ptolémée 1er

2. Les Eléments

La principale œuvre d'Euclide à pour titre *Eléments*. Plusieurs auteurs, avant Euclide ont rédigé des *Eléments*. Ce titre générique signifie qu'il s'agit d'un ouvrage dont la rédaction a le souci d'une organisation logique rigoureuse, d'une présentation structurée des connaissances accumulées dans un domaine des mathématiques précis. Les *Eléments* d'Euclide représentent un aboutissement dans ce type de démarche. L'ouvrage a ainsi servi de référence quasi absolue; il a été, au cours des siècles, copié, commenté, voire modifié et complété, mais jamais recomposé avant que le grand mathématicien David Hilbert ne fasse paraître, en 1899, ses propres « *Grundlagen der Geometrie* » (voir les exercices d'approfondissement).

Activité 9 Triangles isométriques

1. Définition

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si ils peuvent être superposés l'un à l'autre. cela est équivalent à dire que tous leurs côtés et tous leurs angles ont des mesures égales deux-à-deux. Dans ce cas, on note: $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$

Illustrer cette situation.

2. Cas d'isométrie des triangles

a. Quels sont les différents critères nécessaires et suffisants pour que deux triangles quelconques soient isométriques?

b. Euclide établit trois cas d'isométrie des triangles. Dans notre langage, cela correspond aux situations suivantes, que nous considérerons comme des axiomes:

Axiome C-C-C (côté-côté-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si les longueurs des trois côtés du ΔABC sont égales aux longueurs des trois côtés du ΔEFG, alors les deux triangles sont isométriques.

Axiome C-A-C (côté-angle-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si les longueurs de deux côtés et de l'angle adjacent à ces deux côtés sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Axiome A-C-A (angle-côté-angle)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si la longueur d'un côté et des deux angles adjacents à ce côté sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Illustrer ces situations par des exemples.

c. Montrer que les situations suivantes ne permettent pas dans tous les cas d'affirmer que les triangles sont isométriques:

- A-A-A
- C-A-C avec un des deux côtés non adjacent à l'angle

d. Démontrer le théorème suivant attribué à Thales :

> *Thalès A 20 : Proclus (410/12-485)*
> Il faut rendre grâce à l'antique Thalès, entre autres découvertes, pour le théorème suivant : car on dit qu'il fut le premier à découvrir et à énoncer que les angles à la base de tout triangle isocèle sont égaux, bien qu'il ait appelé semblables, selon une terminologie plus ancienne, les angles qui sont égaux.
> *Commentaire sur le premier livre des Eléments d'Euclide, 250, 20.*

e. Enoncer et démontrer le théorème qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Activité 10 Droites remarquables du triangle avec GeoGebra

1. Le logiciel GeoGebra

a. GeoGebra est un logiciel dynamique libre, gratuit et multi-plateformes de mathématiques réunissant géométrie, algèbre et calcul différentiel. GeoGebra a reçu plusieurs distinctions internationales dont les prix européen et allemand pour les logiciels éducatifs.

b. Pour l'utiliser, lancer le navigateur Firefox à l'adresse http://www.geogebra.org puis cliquer sur « Démarrage en ligne ». Commencer par supprimer l'affichage des axes (Menu « Affichage - Axes ») et la fenêtre « Objet libres – objets dépendants ».

2. Bissectrices d'un angle

a. Définition: la **bissectrice d'un angle** est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

b. Construire avec GeoGebra la bissectrice d'un angle que vous avez construit; faire bouger dynamiquement la construction.

c. Choisir un point quelconque situé sur la bissectrice et mesurer les distances entre ce point et chacune des demi-droites sur lesquelles est construit l'angle? Faire bouger la construction afin de pouvoir énoncer une conjecture au sujet de ces distances en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s).

d. Démontrer la conjecture énoncée au point précédent.

Indication : utiliser les cas d'isométrie des triangles

e. Représenter avec GeoGebra les trois bissectrices d'un triangle quelconque; faire bouger dynamiquement la construction. Qu'observe-t-on?

f. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois bissectrices?

g. Qu'a-t-on démontré à ce stade quant à cette conjecture?

3. Cercle inscrit

a. Soit ΔABC un triangle, I l'intersection de ses bissectrices, et r la distance entre I et A.

b. Représenter la situation avec GeoGebra et tracer le cercle C de centre I et de rayon r. Imprimer et joindre au rapport.

c. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à C?

4. Médianes d'un triangle

a. Définition: les **médianes d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé en son milieu.

b. Représenter avec GeoGebra les trois médianes d'un triangle quelconque; faire bouger dynamiquement la construction.

c. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois médianes?

d. Qu'a-t-on démontré à ce stade quant à cette conjecture?

e. Quelle relation y a-t-il entre le centre de gravité du triangle et les médianes?

5. Médiatrice d'un segment

a. Définition: la **médiatrice d'un segment**

b. t [AB] est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

c. Construire avec GeoGebra la médiatrice d'un segment [AB] quelconque; faire bouger

dynamiquement la construction.

d. Choisir un point quelconque situé sur la médiatrice et mesurer les distances entre ce point et A et B. Que penser de ces distances ? Faire bouger la construction afin de pouvoir énoncer une conjecture en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s).

e. Démontrer la conjecture énoncée au point précédent.

Indication : utiliser les cas d'isométrie des triangles

f. Représenter avec GeoGebra les trois médiatrices d'un triangle quelconque; faire bouger dynamiquement la construction. Qu'observe-t-on?

g. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois médiatrices?

h. Qu'a-t-on démontré à ce stade quant à cette conjecture?

6. Cercle circonscrit

a. Soit ΔABC un triangle, I l'intersection de ses médiatrices, et r la distance entre I et A.

b. Représenter la situation avec GeoGebra et tracer le cercle C' de centre I et de rayon r.

c. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à C' ?

7. Hauteurs d'un triangle

a. Définition: les **hauteurs d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé perpendiculairement.

b. Représenter avec GeoGebra les trois hauteurs d'un triangle quelconque; faire bouger dynamiquement la construction.

c. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois hauteurs?

d. Qu'a-t-on démontré à ce stade quant à cette conjecture?

8. * Démontrer

Démontrer les conjectures énoncées dans les points précédents au sujet des intersections des droites remarquables du triangle.

9. * Constructions à la règle et au compas

Toutes ces constructions peuvent être réalisées à la règle et au compas. Voir le complément au chapitre sur ce sujet ...

10. * Droite d'Euler

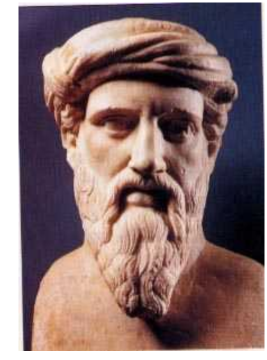
Qu'observe-t-on à propos des points d'intersections des droites remarquables du triangle?

Activité 11 Aller plus loin

Facultatif: constructions à la règle et au compas... (voir le document ad-hoc).

A savoir 1 Pythagore et l'école pythagoricienne

Pythagore (en grec ancien Πυθαγόρας / Pythagóras) serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au Sud-Est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 497 av. J.-C., à l'âge de 83 ans. Il fonda l'école pythagoricienne, une école philosophique de l'Antiquité qui dura neuf ou dix générations. L'enseignement pythagoricien était divisé en deux parties: une pour lnon encore initiés, et l'autre pour les initiés, les mathématiciens[2]. Cet enseignement était oral et secret. La transmission du savoir entre disciples était indissociable du respect des règles morales de la fraternité dans son ensemble : règle du silence, respect du grade d'initiation des disciples. L'école pythagoricienne était ainsi une confrérie tant religieuse que scientifique. Elle croyait à la métempsycose, soit le passage, le transvasement d'une âme dans un autre corps qu'elle va animer.



Elle se préoccupait d'arithmétique; «tout est nombre», les choses sont des nombres, ou les choses consistent en nombres, ou les choses imitent les nombres (qui seraient des principes), ou les choses ont des nombres : un certain flou demeure. La science des nombres est à la fois arithmétique, donc scientifique, et arithmologie, donc symbolique. Chaque unité est figurée par un point, de sorte qu'on a des nombres plans (1, 4, 9, 16... sont carrés ; 1, 3, 6, 10... sont triangulaires), rectangulaires, solides (cubiques, pyramidaux...), linéaires, polygonaux. Le premier nombre pyramidal est 4 (selon Philolaos); les pythagoriciens associent le 1 au point, le 2 à la ligne, le 3 à la surface (la figure géométrique à deux dimensions : cercle, triangle, carré...), le 4 au solide (la figure géométrique à trois dimensions : cube, sphère, pyramide, etc.). Chaque nombre est aussi symbole: la justice est quatre, la vie (et le mariage) est cinq, la perfection est dix, le 6 l'âme, le 7 l'esprit, la santé et la lumière, 8 l'amour, l'amitié, la ruse et l'intellection, le 10 la perfection.

Les pythagoriciens s'intéressaient également à la géométrie (entre autres le fameux théorème de Pythagore), à la musique (Pythagore a découvert les lois de l'harmonique), à la médecine, à la science politique et à l'astronomie!

Source principale: http://fr.wikipedia.org/wiki/Pythagore

A savoir 2 L'incommensurabilité

Définitions

Deux segments $[AB]$ et $[CD]$ de longueurs respectives $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont **commensurables** si il existe un nombre rationnel k tel que $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$. Sinon, ils sont **incommensurables.**

Exemples

☐ Deux segments de longueurs respectives 2,1 et 6,7 sont commensurables car il existe un nombre rationnel (ici sous forme de fraction) $k=\frac{67}{21}$ tel que $2,1\cdot\frac{67}{21}=6,7$

☐ Deux segments de longueurs respectives 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables car il n'existe aucun nombre rationnel k (fraction) tel que $\sqrt{2}=k\cdot 1$, soit tel que $\sqrt{2}=k$

La découverte de segments incommensurables par Hippase de Métaponte vers -460 engendra une grave crise chez les pythagoriciens.

2Pour rappel, l'étymologie de « mathématique » est « mathema » en grec, qui signifie « connaissance »

A savoir 3 Théorèmes

Théorème « hauteur »

Si le triangle ΔABC est <u>rectangle en A</u>, et qu'on trace la hauteur issue du sommet A, alors on a $AH^2 = BH \cdot CH$

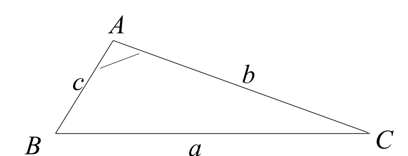
Théorème « Euclide »

Si le triangle ΔABC est <u>rectangle en A</u>, et qu'on trace la hauteur issue du sommet A, alors on a $AB^2 = BH \cdot AB$ et $AC^2 = CH \cdot BC$

Théorème « Pythagore »

Si le triangle ΔABC est <u>rectangle en A</u>

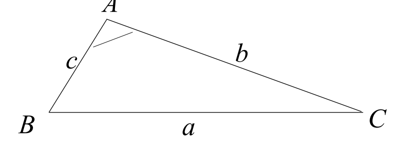
alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (ou $b^2 + c^2 = a^2$)



Remarque: dans son livre « *The Pythagorean proposition* », Elisha Scott Loomis a réuni 370 démonstrations différentes du théorème de Pythagore!

Théorème « réciproque Pythagore »

Si dans un triangle ΔABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (ou $b^2 + c^2 = a^2$), alors ΔABC est <u>rectangle en A</u>,



A savoir 4 La boîte à outils de base pour démontrer

Des définitions

- ☐ Angle, angles complémentaires, supplémentaires, opposés, correspondants, alternes-internes
- ☐ Triangle, triangle rectangle, isocèle, équilatéral – Quadrilatère, carré, rectangle, losange, trapèze, parallélogramme - polygone
- ☐ Côtés correspondants - triangles semblables - triangles isométriques
- ☐ Arc de cercle, secteur de disque, angle inscrit, angle au centre les puissances (et les racines)

Des notations

- ☐ Angle : $\widehat{ABC}$ ou <ABC ou ▯, b, g, d, e, ...
- ☐ Triangle : ΔABC et les notations usuelles dans le triangle
- ☐ Triangles semblables : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
- ☐ Triangles isométriques : $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

Des axiomes

- ☐ Des angles correspondants sont égaux : Ax Corr
- ☐ Cas d'isométrie des triangles : Ax C-C-C, A-C-A, C-A-C

Des théorèmes non démontrés

- ☐ Réciproque de Pythagore : Thm RecPyth
- ☐ Réciproque de Thalès : Thm RecTha

Des théorèmes démontrés

- ☐ Des angles opposés sont égaux : Thm AnOpp
- ☐ Des angles alternes-internes sont égaux : Thm AnAlt/Int
- ☐ La somme des angles dans un triangle est égale à 180° : Thm 180
- ☐ Pythagore : Thm Pyth
- ☐ Thalès : Thm Tha
- ☐ Hauteur : Thm Hau
- ☐ Euclide : Thm Euc
- ☐ Cercle de Thalès : un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est droit : Thm CerTha

A savoir 5 Euclide et les Eléments



Euclide nait vers -325 et meurt vers -265[1]. Il part en Égypte pour y enseigner les mathématiques. Il travaille au musée d'Alexandrie et à l'école de mathématiques. Entouré de ses disciples, il mène de nombreux travaux de recherche.

Les Éléments sont une compilation du savoir géométrique et resteront le noyau de l'enseignement mathématique pendant près de 2000 ans. Il se peut qu'aucun des résultats contenus dans les Éléments ne soit d'Euclide, mais l'organisation de la matière et son exposé lui sont dus. Les Éléments sont divisés en treize livres. Les livres 1 à 6, géométrie plane, les livres 7 à 9, théorie des rapports, le livre 10, la théorie de nombres irrationnels d'Eudoxe, et enfin les livres 11 à 13 de géométrie dans l'espace. Le livre se termine par l'étude des propriétés des cinq polyèdres réguliers et une démonstration de leur existence. Les Éléments sont remarquables par la clarté avec laquelle les théorèmes sont énoncés et démontrés.

Plus d'un millier d'éditions manuscrites des Éléments ont été publiées avant la première version imprimée en 1482. La rigueur n'y est pas toujours à la hauteur des canons actuels, mais la méthode consistant à partir d'axiomes, de postulats et de définitions, pour déduire un maximum de propriétés des objets considérés, le tout dans un ensemble organisé, était nouvelle pour l'époque. Les Éléments durent leur succès à leur supériorité d'organisation, de systématisation et de logique mais pas d'exhaustivité (ni conique, ni résolution par neusis[3] ou ajustement). Les dernières recherches entreprises en histoire des mathématiques tendent à prouver qu'Euclide n'est pas le seul auteur des Éléments. Il était vraisemblablement entouré d'un collège de disciples ayant tous participé à leur élaboration.



Un fragment des Éléments

La géométrie telle qu'elle est définie par Euclide dans ce texte fut considérée pendant des siècles comme la géométrie et il fut difficile de lui ôter cette suprématie ; Nicolaï Ivanovitch Lobatchevsky fut le premier à s'y essayer officiellement dès 1826, suivi de János Bolyai, mais la légende veut qu'il n'ait pas été pris au sérieux jusqu'à la mort de Gauss, lorsque l'on découvrit parmi les brouillons de ce dernier qu'il avait lui aussi imaginé des géométries non euclidiennes...

A savoir 6 Triangles isométriques

Définition

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si ils peuvent être superposés l'un à l'autre. cela est équivalent à dire que tous leurs côtés et tous leurs angles ont des mesures égales deux-à-deux. Dans ce cas, on note: $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$

Axiomes « Cas d'isométrie des triangles »

- **Axiome C-C-C (côté-côté-côté)**
Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si les longueurs des trois côtés du ΔABC sont égales aux longueurs des trois côtés du ΔEFG, alors les deux triangles sont isométriques.
- **Axiome C-A-C (côté-angle-côté)**
Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si les longueurs de deux côtés et de l'angle adjacent à ces deux côtés sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.
- **Axiome A-C-A (angle-côté-angle)**
Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si la longueur d'un côté et des deux angles adjacents à ce côté sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Remarque: les situations suivantes ne permettent pas dans tous les cas d'affirmer les que les triangles sont isométriques:

- A-A-A
- C-A-C avec un des deux côtés non adjacent à l'angle

A savoir 7 Droites remarquables du triangle

Définition « bissectrice »

La **bissectrice d'un angle** est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Théorème « bissectrice »

Si un point A appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à égale distance des deux demi-droites qui forment l'angle.

Théorème « bissectrices d'un triangle»

Si ΔABC est un triangle, alors ses bissectrices se coupent en un unique point.
Ce point est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle ΔABC.

Définition « médianes d'un triangle »

Les **médianes d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé en son milieu.

Théorème « médianes d'un triangle»

Si ΔABC est un triangle, alors ses médianes se coupent en un unique point.
Ce point est le **centre de gravité** du triangle ΔABC.

Définition « médiatrice d'un segment »

La **médiatrice d'un segment** [AB] est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

Théorème « médiatrice »

Si un point A appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des deux extrémités du segment.

Théorème « médiatrices d'un triangle»

Si ΔABC est un triangle, alors ses médiatrices se coupent en un unique point.
Ce point est le centre du **cercle circonscrit** au triangle ΔABC .

Définition « hauteurs d'un triangle »

Les **hauteurs d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé perpendiculairement.

Théorème « hauteurs d'un triangle »

Si ΔABC est un triangle, alors ses hauteurs se coupent en un unique point.

Droite d'Euler

La **droite d'Euler** est la droite qui passe par les quatre points d'intersection des droites remarquables du triangle.

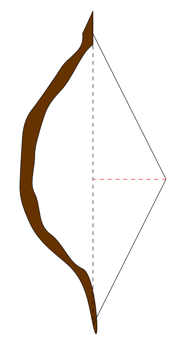
Pythagore

1 Théo veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur. Quelle doit être la longueur minimum de cette échelle ? Arrondir au cm.

2 La corde élastique a une longueur de 60 cm au repos.

a. Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de 11 cm en la tirant par son milieu ? Arrondir au cm.

b. Il est conseillé de ne pas tirer la corde de plus de 8 cm. Quel est, en cm, l'écartement maximal conseillé ?

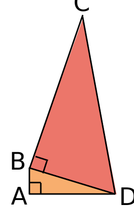


3 Sur la figure ci-contre :

AB = 1,5 cm ; AD = 6 cm et BC = 12 cm.

a. Calculer la valeur arrondie au mm de BD.

b. Calculer, en justifiant, la valeur exacte de DC.



4 Calculer la mesure, approchée par excès au dixième près, de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 7 cm. En déduire son aire.

5 Un triangle EFG est rectangle en E : EG = 7 cm et $\widehat{FGE}$ = 45°.

a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.

b. Calculer, en justifiant, EF et FG (arrondir au mm).

6 Rectangle ou non ?

a. Le triangle XYZ est tel que XY = 29,8 cm ; YZ = 28,1 cm ; XZ = 10,2 cm.

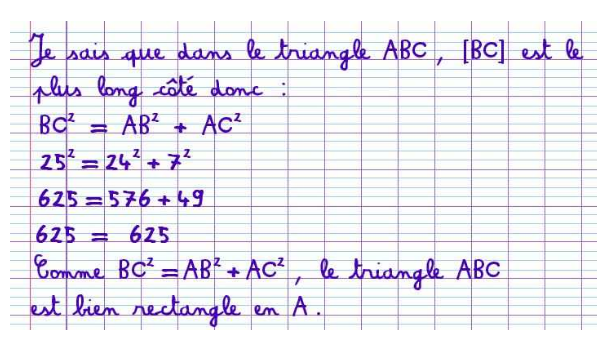
Expliquer pourquoi il n'est pas rectangle.

b. Soit le triangle ALE tel que : AL = 13,1 cm ; LE = 11,2 cm ; EA = 6,6 cm.

Est-il rectangle ? Justifier.

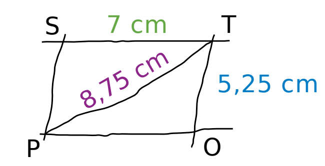
7 ABC est un triangle tel que BC = 25 cm ; AB = 24 cm et AC = 7 cm. Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Quentin a rédigé sur sa copie le texte :


Je sais que dans le triangle ABC, [BC] est le plus long côté donc :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$25^2 = 24^2 + 7^2$
$625 = 576 + 49$
$625 = 625$
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est bien rectangle en A.

Que penser de ce raisonnement?

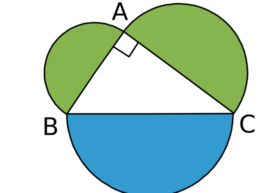
8 On considère le parallélogramme STOP ci-contre dessiné à main levée:



Démontrer que le parallélogramme STOP est un rectangle.

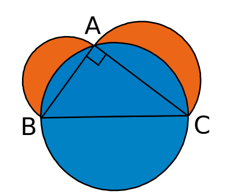
9 Les lunules d'Hippocrate

ABC est un triangle rectangle en A. On a construit les demi-cercles de diamètres [AB], [AC] et [BC] comme le montre la figure ci-contre.



a. Exprimer l'aire totale de la figure en fonction de AB, AC et BC.

b. Montrer que l'aire du demi-disque bleu est égale à la somme des aires des demi-disques verts. En déduire que l'aire totale de la figure est égale à la somme des aires du triangle ABC et du disque de diamètre [BC].



c. Montrer que l'aire des lunules (les parties en orange ci-contre) est égale à l'aire du triangle ABC.

10 Les mesures de la figure sont en cm (la figure n'est pas en vraie grandeur).

a. Quelle est l'aire du carré bleu?

b. Procéder de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm^2.

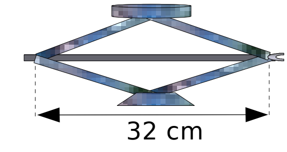
Exercices supplémentaires

11 Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment de l'acheter, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit. Les deux seules mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

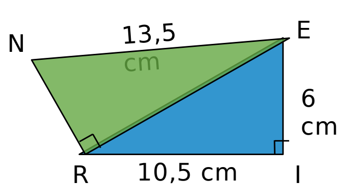
a. A-t-il besoin d'aller mesurer le côté manquant ?

b. L'aider à calculer la longueur de la clôture qu'il doit acheter.

12 Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté. À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ? Arrondir au mm.



13 Démontrer que NR = EI. Justifier toutes les étapes.



14 TSF est un triangle isocèle en S tel que ST = 4,5 cm et TF = 5,4 cm.

a. Calculer la longueur de la hauteur relative à la base [TF].

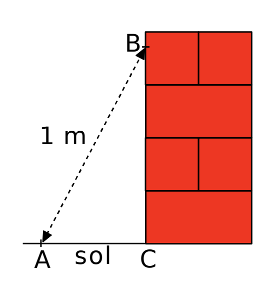
b. En déduire l'aire de ce triangle.

15 Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser des pots de fleurs. Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : AT = 42 cm ; AE = 58 cm et TE = 40 cm.

L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifier.

16 LOSA est un parallélogramme tel que : LO = 58 mm ; LS = 80 mm et OA = 84 mm. Démontrer que LOSA est un losange.

17 Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur en briques de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail : il marque un point B sur le mur à 80 cm du sol et un point A à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et il obtient 1 m. L'apprenti a-t-il bien construit son mur perpendiculaire au sol ? Justifier.



Réponses des exercices supplémentaires

11

a. Non, il s'agit d'un triangle rectangle donc il peut calculer le côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore

b. Le 3ème côté mesure 8,16 m et donc la longueur de la clôture est de 25,5 m.

12 Le cric soulève la voiture de 27,2 cm.

13 Le triangle ΔRIE est rectangle en I, alors $RE^2 = RI^2 + EI^2 = (10,5)^2 + 6^2$.

Le triangle ΔNRE est rectangle en R, alors $NR^2 + RE^2 = NE^2$.

=>

$NR = \sqrt{NE^2 - RE^2} = \sqrt{(13,5)^2 - ((10,5)^2 + 6^2)} = 6\,cm$

Donc $NR = EI = 6\,cm$

14

c. h = 3,6 cm

d. aire = 9,72 cm^2

Comme $AT^2 + TE^2 = AE^2$, alors le triangle ΔATE est rectangle en T. Donc l'étagère est horizontale.

15 Propriété du parallélogramme : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Soit I le point où les diagonales du parallélogramme LS et OA se coupent. Alors $LI = IS = \frac{80}{2} = 40\,mm$ et $OI = IA = \frac{84}{2} = 42\,mm$.

On considère le triangle ΔLIO : comme $LI^2 + OI^2 = LO^2$, alors le triangle ΔLIO est rectangle en I.

=> Les diagonales du parallélogramme $LOSA$ sont perpendiculaires.

=> $LOSA$ est un losange. (Propriété du losanges: Un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.)

16 Comme $AC^2 + BC^2 = AB^2$, alors le triangle ΔABC est rectangle en C. Donc le mur est bien perpendiculaire au sol.

Exercices d'approfondissement

1 Visionner tout ou partie du DVD « Donald au pays des mathémagiques »

2 Pythagore et la musique: voir par exemple http://www.kulturica.com/pymusique.htm

3 89 démonstrations du théorème de Pythagore: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

4 La philosophie au temps de la Grèce Antique: http://hist-geo-grece.ac-orleans-tours.fr/php5/themes/philo.htm

5 *Les Eléments d'Euclide*

• Les *Axiomes* ou *Notions communes*

Euclide, dans son organisation, s'inspirant des travaux d'Aristote, commence par présenter les axiomes ou notions communes, qui sont au nombre de 9. Il s'agit d'affirmations non démontrées réglant la logique d'un discours déductif. Ces affirmations sont si évidentes qu'elles s'imposent d'elles-mêmes. De plus elles s'appliquent à toutes les formes de discours logique et ne sont pas spécifiques à une science particulière, sauf peut-être la notion commune 9 qui explicite que le domaine étudié est celui de la géométrie plane. En effet sur une sphère, par exemple, deux méridiens englobent bien une aire.

N.C. 1 Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

N.C. 2 Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

N.C. 3 Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

N.C. 4 Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.

N.C. 5 Et les doubles du même sont égaux entre eux.

N.C. 6 Et les moitiés du même sont égales entre elles.

N.C. 7 Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

N.C. 8 Et le tout est plus grand que la partie.

N.C. 9 Et deux droites ne contiennent pas une aire.

Essayer de traduire dans notre langage algébrique actuel ces notions communes.

• Les Postulats ou Demandes

Aristote distingue les axiomes et les postulats dans le sens où les postulats sont spécifiques au domaine étudié. La géométrie euclidienne en distingue 5:

Dem. 1 Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.

Ce *postulat* assure l'existence d'une droite passant par deux points.

Dem. 2 Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

La droite est donc conçue comme un segment que l'on peut prolonger indéfiniment.

Dem. 3 Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.

Ce *postulat* garantit l'existence d'un cercle construit à partir de tout point et à l'aide de tout segment.

Dem. 4 Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

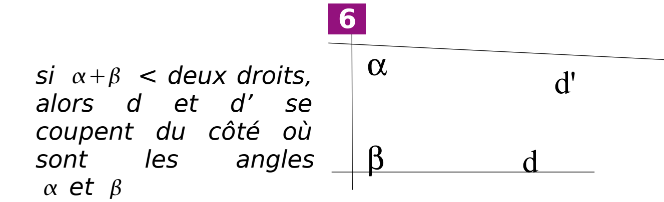
Euclide *se* donne, par cette demande, une unité de mesure pour les angles, l'angle droit.

Dem. 5 Et que, si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

On constate que la cinquième demande présente un caractère formel beaucoup moins « naturel » que celui des autres demandes. Elle répond, de ce fait, moins à l'exigence aristotélicienne d'une affirmation qui s'impose par sa simplicité et son immédiateté. Elle s'illustre de la manière suivante:

6

si $\alpha+\beta$ *< deux droits, alors d et d' se coupent du côté où sont les angles* α *et* β



• Les Définitions du Livre I

Euclide fait suivre les notions communes et les demandes de définitions. Le Livre I en compte vingt-trois. Nous citerons quelques unes de ces vingt-trois définitions.

Df. 1 Un point est ce qui n'a pas de partie.

Df. 2 Une ligne est une longueur sans largeur.

Df. 3 Les extrémités des lignes sont des points

....

Ainsi une ligne n'est-elle que potentiellement infinie. C'est pourquoi lorsque Euclide parle de « droite », il faut comprendre « segment ».

Df. 5 Une surface est ce qui a seulement une longueur et une largeur.

Df. 6 Les extrémités d'une surface sont des lignes.Df. 10 Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.

En définissant la notion de perpendicularité, Euclide se donne, conjointement à la demande 4, une mesure absolue des angles : l'angle droit.

Df. 15 Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique < celle appelée circonférence > par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont < jusqu'à la circonférence du cercle > égales entre elles.

Df. 16 Et le point est appelé centre du cercle.

Df. 17 Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

On attribuait à Thalès la « démonstration » de cette affirmation qu'Euclide, dans sa réorganisation, considère, comme la définition 17.

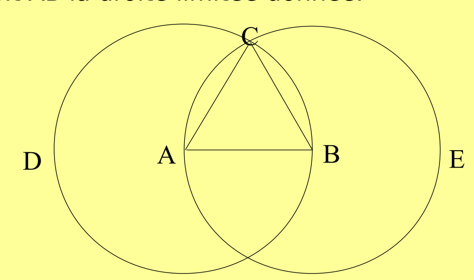
Df. 23 Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

7 *Etude d'une proposition des Eléments*

L'objectif d'Euclide est d'utiliser ces seuls axiomes, postulats et définitions, pour démontrer un certain nombre de propositions et établir ainsi les éléments d'une construction intellectuelle. Nous allons suivre Euclide dans une de ses propositions, mais nous verrons que la lourdeur du style comme de l'argumentation euclidienne nous ferons regretter le formalisme actuel !

I. 1
Sur une droite limitée donnée, [il s'agit de] construire un triangle équilatéral.

Soit AB la droite limitée donnée.



Il faut construire un triangle équilatéral sur la droite AB.
Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit décrit le cercle BCD (Dem. 3), et qu'ensuite du centre B, et au moyen de l'intervalle BA, soit décrit le cercle ACE (Dem. 3), et que du point C auquel les cercles s'entrecoupent soient jointes les droites CA, CB jusqu'aux points A, B (Dem. 1).
Et puisque le point A est le centre du cercle CDB, AC est égale à AB (Df. 15) ; ensuite, puisque le point B est le centre du cercle CAE, BC est égale à BA (Df. 15). Et il a été démontré que CA est égale à AB ; donc chacune des droites CA, CB est égale à AB ; or les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles (NC. 1) ; et donc CA est égale à CB ; donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.
Donc le triangle ABC est équilatéral (Df. 20) et il est construit sur la droite limitée donnée AB.
Donc, sur une droite limitée donnée, un triangle équilatéral est construit. Ce qu'il fallait faire. (Les Eléments, T. 1, pp. 194-95).

Faire une analyse précise du texte ci-dessous afin d'en dégager le déroulement du discours argumentatif. Préciser les étapes de ce discours.

8 La géométrie non-euclidienne:
http://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9om%C3%A9trie_non_euclidienne

9 *Les solides de Platon*

Philolaos A 15 : Aétius (Ier s. ap. J.-C.)
Pour Pythagore, il existe cinq figures de volumes, qu'il appelle encore mathématiques : le cube qui, selon lui, a produit la terre ; la pyramide, qui a produit le feu ; l'octaèdre qui a produit l'air ; l'icosaèdre qui a produit l'eau, et le dodécaèdre qui a produit la sphère de l'univers.

Opinions, II, VI, 5 in : Dumont, p. 257

On parle de **polyèdres réguliers** parce que

toutes leurs faces sont constituées par la même figure polygonale régulière.

Pourquoi n'y a-t-il que cinq polyèdres réguliers possibles ? Confronter votre réponse à celle donnée par Euclide dans le texte qui suit :

Euclide (environ 325-250)
Je dis alors qu'en plus des cinq figures susdites, il ne sera construit aucune autre figure contenue par des figures planes équilatérales et équiangles égales entre elles.
En effet d'une part il n'est pas construit dans le solide contenu par deux triangles ni, plus généralement, par deux figures planes. Et contenu par trois triangles, c'est celui de la pyramide, et par quatre, celui de l'octaèdre, et par cinq celui de l'icosaèdre ; et il n'existera pas d'angle solide contenu par six triangles équilatéraux et équiangles construits en un seul point ; en effet, l'angle du triangle équilatéral étant deux tiers d'un angle droit, les six seraient égaux à quatre droits ; ce qui est impossible ; car tout angle solide est contenu par des angles plans plus petits que quatre droits. Alors pour les mêmes raisons il n'est pas construit d'angle solide contenu par plus de six angles plans. Et l'angle du cube est contenu par trois carrés ; mais par quatre, c'est impossible ; car de nouveau ils seraient quatre droits.
Et par des pentagones équilatéraux et équiangles, par trois c'est celui du dodécaèdre ; mais par quatre, c'est impossible ; car l'angle du pentagone équilatéral valant un-droit-et-un-cinquième, les quatre angles seraient plus grands que quatre droits ; ce qui est impossible. Assurément un angle solide ne sera pas non plus contenu par d'autres figures polygonales à cause de la même absurdité. Donc, en plus des cinq figures susdites, il ne sera construit aucune autre figure solide contenue par des figures planes équilatérales et équiangles égales entre elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Eléments, Livre XIII, T. 4, pp. 468-69

Sur les 5 solides de Platon, voir:

a. http://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Plato

b. http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm

c. voir aussi les 13 solides d'Archimède : http://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_d'Archim%C3%A8de

d. Dessiner ces 5 solides

e. Expliquer avec vos mots pourquoi il ne peut pas y avoir d'autres polyèdres réguliers ?

Les amis sont des compagnons de voyage,
qui nous aident à avancer sur le chemin d'une vie plus heureuse.

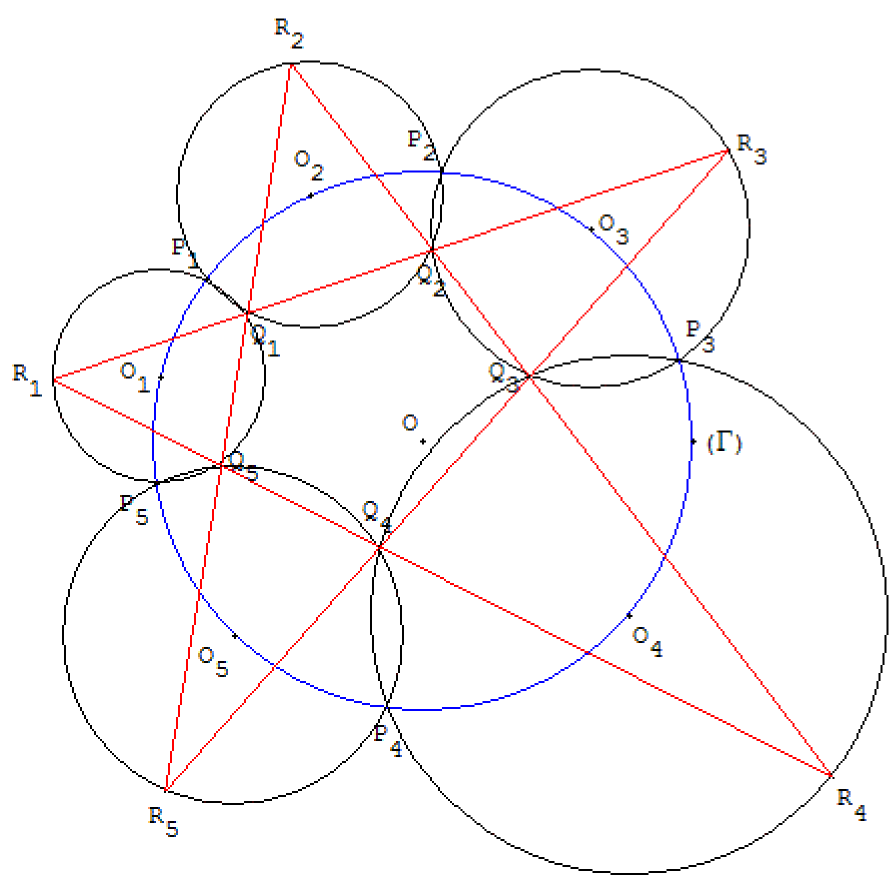
Pythagore

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ Situer les parcours de Pythagore (et son école pythagoricienne) et d'Euclide; l'importance des « Eléments »
- ✔ Incommensurabilité
- ✔ Triangles isométriques
- ✔ Cas d'isométrie CCC, CAC et ACA; les autres « cas » ne suffisent pas ...
- ✔ Bissectrice d'un angle, médiatrice d'un segment, hauteurs d'un triangle, médianes d'un triangle, droites remarquables du triangle, cercle inscrit et circonscrit
- ✔ La boîte à outils pour démontrer (déf/ax/thm)

Savoirs-faire

- ✔ Résoudre des problèmes à l'aide des théorèmes de Thales et Pythagore (et/ou de leurs réciproques)
- ✔ Enoncer, démontrer, utiliser à bon escient:
  - ✔ théorème « hauteur »
  - ✔ théorème « Euclide »
  - ✔ théorème « Pythagore »
  - ✔ théorème «bissectrice d'un angle»
  - ✔ théorème « médiatrice d'un segment »
- ✔ Enoncer et utiliser à bon escient:
  - ✔ théorème « réciproque de Pythagore »
  - ✔ théorèmes « droites remarquables du triangle »
- ✔ Utiliser ces théorèmes pour démontrer de nouveaux résultats

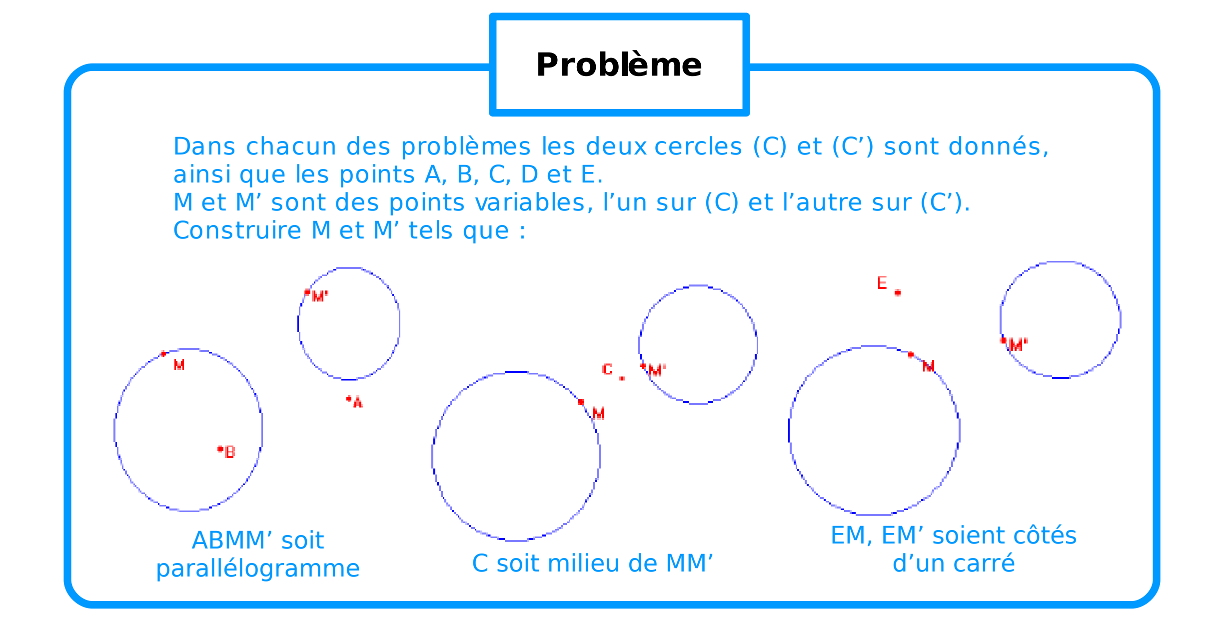


Le théorème des 5 cercles

Les droites portées par les côtés du pentagone $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5$ ont leurs points d'intersection R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 situés sur les cinq cercles

Problème

Dans chacun des problèmes les deux cercles (C) et (C') sont donnés, ainsi que les points A, B, C, D et E.
M et M' sont des points variables, l'un sur (C) et l'autre sur (C').
Construire M et M' tels que :



ABMM' soit parallélogramme

C soit milieu de MM'

EM, EM' soient côtés d'un carré

Source principale: Serge Piccione (DIP-GE)

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 Pendule

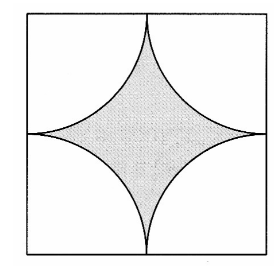
Un pendule oscille au bout d'une corde de 60 cm. Sachant que l'angle décrit est de 64°, trouver la longueur de l'arc décrit. Quel est l'angle décrit au cours d'une oscillation du pendule ?

Activité 2 Secteur

Expliciter, illustrer et démontrer la formule suivante : $A=\frac{L\cdot r}{2}$

Activité 3 Aire

Calculer l'aire et le périmètre de la surface ombrée:



Le côté du carré mesure 5 cm

Activité 4 Angles au centre et angles inscrits

1. Définir

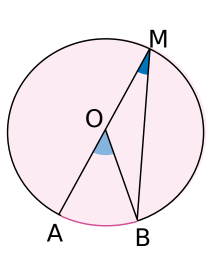
Définir ce que sont un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle.

2. Démontrer

A, B et M sont trois points du cercle de centre O de telle sorte que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

a. Enoncer une conjecture quant aux mesures de angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$

b. Démonstration

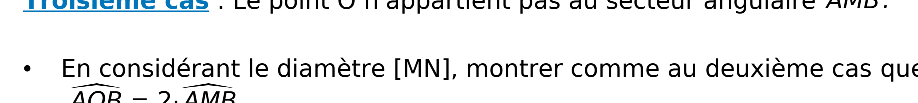


- **Premier cas** : [AM] est un diamètre du cercle. On désigne par x la mesure en degré de l'angle $\widehat{AMB}$.
  - Quelle est la nature du triangle ΔOMB ? Justifier.
  - Exprimer les mesures des angles du triangle ΔOMB en fonction de x.
  - En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

- **Deuxième cas** : Le point O appartient au secteur angulaire $\widehat{AMB}$. On appelle N le point du cercle de sorte que [MN] soit un diamètre.
    - Que dire des angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{AON}$?
    - Que dire des angles $\widehat{NMB}$ et $\widehat{NOB}$?
    - Montrer alors que, dans ce cas, la conjecture est vérifiée.



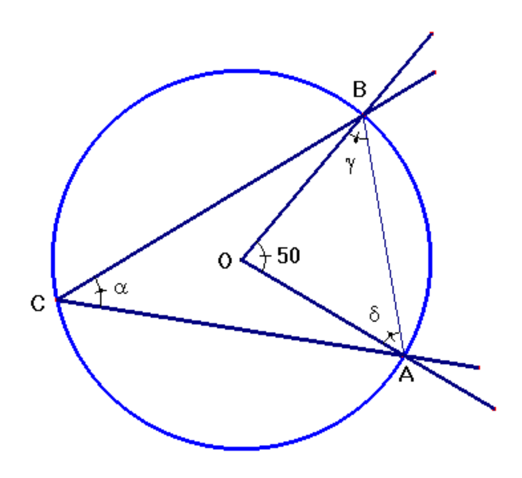
- **Troisième cas** : Le point O n'appartient pas au secteur angulaire $\widehat{AMB}$.



    - En considérant le diamètre [MN], montrer comme au deuxième cas que $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$.

Activité 5 Déterminer des angles

Déterminer α, δ et γ

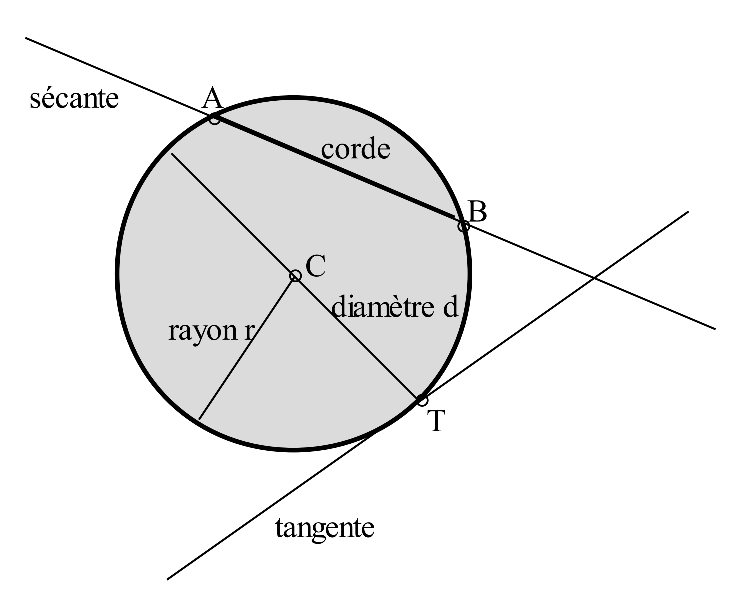


A savoir 1 Angles et cercles

Définitions

- ☐ Un **cercle** est un ensemble de points situés à une même distance d'un point donné.
- ☐ Le point donné est le **centre** C et la distance donnée le **rayon** r du cercle.
- ☐ Un **disque** est une partie finie du plan délimitée par un cercle (bord inclu)
- ☐ Une droite est une **sécante d'un cercle** si elle coupe ce cercle en deux points A et B distincts.
- ☐ Le segment limité par les deux points d'intersection d'une sécante est une **corde** (on peut la voir aussi comme l'intersection d'une sécante et d'un disque).
- ☐ Le terme **diamètre** d est utilisé dans deux sens différents: d'une part, c'est une corde d'un cercle passant par le centre de ce cercle et d'autre part c'est la longueur de cette corde.
- ☐ De la même façon, le terme rayon est utilisé pour un segment joignant le centre d'un cercle à un point de ce cercle et aussi pour la longueur de ce segment. (Rem : $d = 2 \cdot r$)
- ☐ Une droite est une **tangente d'un cercle** si elle coupe ce cercle en un seul point T.
- ☐ Un **arc de cercle** est la partie d'un cercle interceptée par un angle au centre (c'est une ligne).
- ☐ Un **secteur de disque** est la partie d'un disque interceptée par un angle au centre.
- ☐ On appelle **segment circulaire** la portion de disque comprise entre un arc et la corde qui le sous-tend.

Illustration



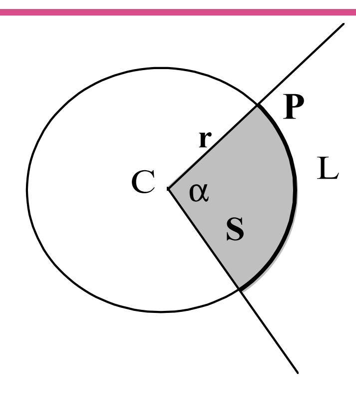
Périmètre et aire du disque

- ☐ Le **périmètre** d'un disque (ou d'un cercle) est donné par la formule: $P=2\pi\cdot r$
- ☐ L'**aire** de ce même disque est donnée par la formule: $P=\pi\cdot r^2$

Longueur d'un arc et aire d'un secteur

☐ La longueur de l'arc L, la mesure de l'angle au centre α (en degré) et le nombre de tours x qu'a parcouru un point P sur le cercle sont des grandeurs proportionnelles; on a alors l'égalité suivante entre rapports: $\frac{\alpha°}{360°}=\frac{L}{2\pi r}=\frac{x \text{ tours}}{1 \text{ tour}}$

☐ L'aire A du secteur S et la mesure de l'angle au centre α (en degré) sont des grandeurs proportionnelles et on a alors l'égalité entre les rapports suivants: $\frac{\alpha°}{360°}=\frac{A}{\pi r^2}$



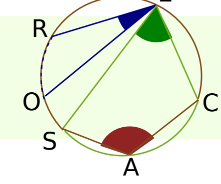
A savoir 2 Angles au centre et angles inscrits

Définition

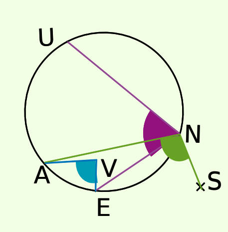
Un **angle inscrit dans un cercle** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en des points distincts du sommet. La portion de cercle comprise entre les deux côtés de l'angle s'appelle l'**arc de cercle intercepté**.

Exemple 1**:** donner le nom des arcs de cercle interceptés par les angles inscrits dans le cercle ci-dessous.

L'angle inscrit $\widehat{REO}$ intercepte le petit arc de cercle $\overset{\frown}{RO}$.
L'angle inscrit $\widehat{SEC}$ intercepte le petit arc de cercle $\overset{\frown}{SC}$.
L'angle inscrit $\widehat{SAC}$ intercepte le grand arc de cercle $\overset{\frown}{SC}$.



Exemple 2**:** les angles $\widehat{UNE}$, $\widehat{AVE}$ et $\widehat{ANS}$ sont-ils des angles inscrits dans le cercle? Si oui, donner le nom de l'arc intercepté.



Le sommet de l'angle $\widehat{UNE}$ appartient au cercle et ses côtés recoupent le cercle en U et E : l'angle $\widehat{UNE}$ est un angle inscrit dans le cercle. Il intercepte l'arc $\overset{\frown}{UE}$.

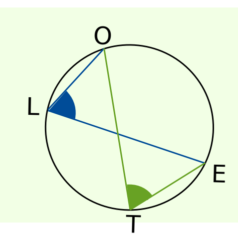
Le sommet de l'angle $\widehat{AVE}$ n'est pas un point du cercle : l'angle $\widehat{AVE}$ n'est pas un angle inscrit dans le cercle.

Le côté [NS) de l'angle $\widehat{ANS}$ ne coupe le cercle qu'en N : l'angle $\widehat{ANS}$ n'est pas un angle inscrit dans le cercle.

Théorème « angles inscrits » [Thm AnIns]

Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Exemple**:** sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{OTE}$ mesure 67°.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OLE}$.



Les angles $\widehat{OTE}$ et $\widehat{OLE}$ sont inscrits dans le cercle.
Ils interceptent tous les deux l'arc $\overset{\frown}{OE}$.

Donc ils ont la même mesure.

L'angle $\widehat{OTE}$ mesure 67°.

Donc l'angle $\widehat{OLE}$ mesure 67°.

Définition

Un **angle au centre dans un cercle** est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

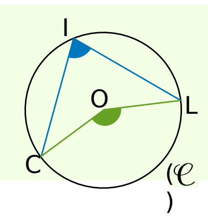
Théorème « angles au centre et inscrit » [Thm AnCen/Ins]

Si un angle au centre β intercepte le même arc de cercle qu'un angle inscrit α, alors $\beta=2\alpha$

Remarque: si $\alpha=90°$, on obtient le théorème du cercle de Thalès!

Exemple **:** La figure ci-dessous représente un cercle C de centre O.
L'angle $\widehat{CIL}$ mesure 76°. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{COL}$.

Dans le cercle C, l'angle inscrit $\widehat{CIL}$ et l'angle au centre $\widehat{COL}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{CL}$.
Donc l'angle au centre $\widehat{COL}$ mesure le double de l'angle inscrit $\widehat{CIL}$.
$\widehat{COL} = 2 \times \widehat{CIL} = 2 \times 76° = 152°$.
L'angle au centre $\widehat{COL}$ mesure 152°.

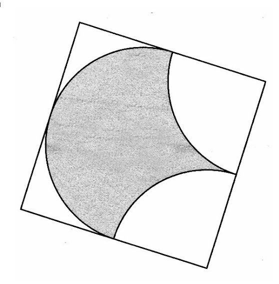


1 Compléter les lignes du tableau suivant : (précision: 2 décimales)

α	r	L	A
45°	8,31 cm		
	50 m	90,57 m	
120°		9,70 cm	
	5,88 cm		90 cm^2
	10 cm		
		30 m	
20°			90 dm^2
			10,12 m^2

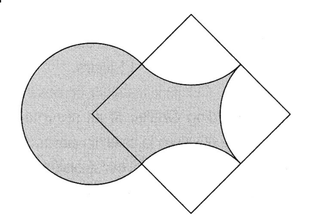
2 Calculer l'aire et le périmètre des surfaces ombrées:

a.



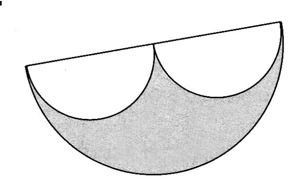
Le côté du carré mesure 4 m.

b.



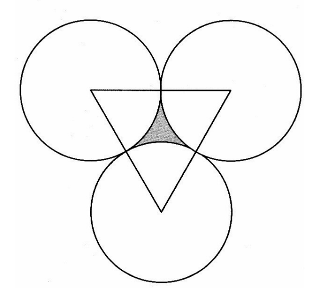
Le côté du carré mesure 8 mm.

c.



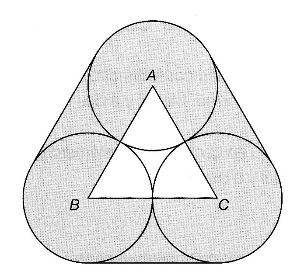
Le diamètre du grand demi-cercle vaut 14m.

d.



Le rayon de chaque cercle mesure 3 km.

e.



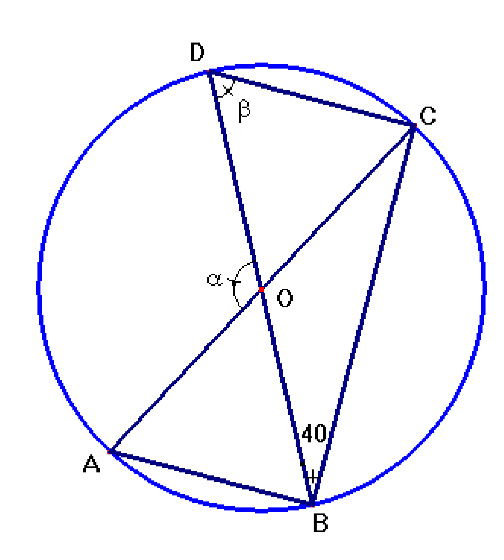
Le côté du triangle équilatéral mesure 5 cm.

3 L'aiguille des minutes d'une horloge a 6 cm de long. Quelle est la longueur de l'arc décrit par l'extrémité de l'aiguille (Réponse en cm).

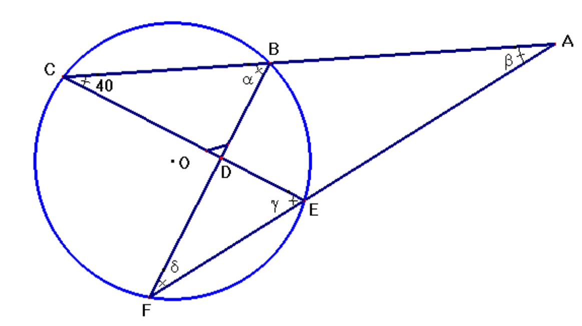
a. en 20 minutes ? **b.** en 35 minutes ?

4 O est le centre du cercle. Déterminer les valeurs manquantes en indiquant les propriétés et théorèmes utilisés:

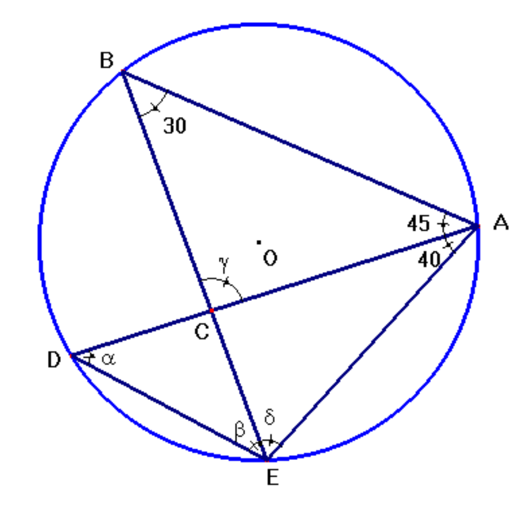
a.



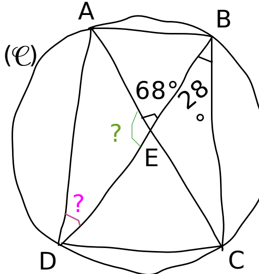
b.



c.



5 Sur la figure à la main levée ci-dessous, les droites (AC) et (BD) se coupent en E.



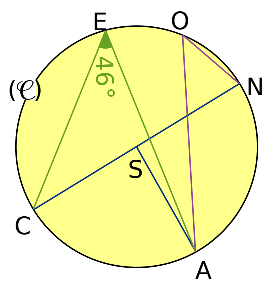
a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AED}$ puis celle de l'angle $\widehat{ADB}$. Justifie ta démarche.

b. Le point E est-il le centre du cercle ? Justifier.

Exercices supplémentaires

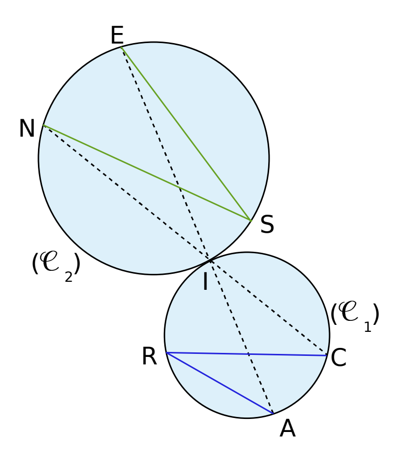
6 L'extrémité d'un pendule de 35 cm de long décrit un arc de cercle de 15 cm. Quel est l'angle décrit au cours d'une oscillation du pendule ?

7 La figure ci-dessous représente un cercle (𝒞) de centre S.



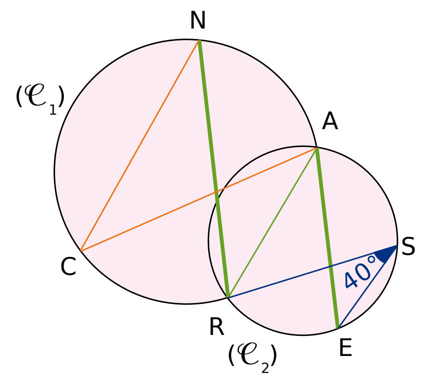
Déterminer, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{NOA}$.

8 Sur la figure ci-dessous, les droites (NC) et (AE) se coupent en I, point d'intersection des cercles ($𝒞_1$) et ($𝒞_2$).



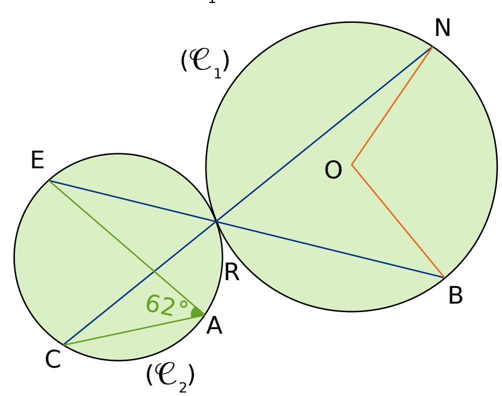
Expliquer pourquoi $\widehat{NSE} = \widehat{ARC}$.

9 Sur la figure ci-dessous, les droites (NR) et (AE) sont parallèles. Les cercles ($𝒞_1$) et ($𝒞_2$) se coupent en R et A.



Déterminer, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{NCA}$.

10 Sur la figure ci-dessous, les droites (EB) et (CN) se coupent en R, point d'intersection des cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$. Le point O est le centre du cercle $(\mathscr{C}_1)$.



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{NOB}$. Justifie ta démarche.

Réponses des exercices supplémentaires

6 $\theta \simeq 24.57°$

7 $\widehat{CSA}$ est un angle au centre du cercle $(\mathscr{C})$, $\widehat{CEA}$ est inscrit dans le même cercle et ces 2 angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{CA}$ donc $\widehat{CSA}$ est égal au double de $\widehat{CEA}$.

On sait que $\widehat{CEA} = 46°$

donc $\widehat{CSA} = 2 \times 46° = 92°$

Par ailleurs, les points C, S et N sont alignés (qu'en pensez-vous ?) donc les angles $\widehat{CSA}$ et $\widehat{NSA}$ sont supplémentaires :

$\widehat{NSA} = 180° - \widehat{CSA} = 180° - 92° = 88°$

Enfin, $\widehat{NSA}$ est un angle au centre du cercle $(\mathscr{C})$, $\widehat{NOA}$ est inscrit dans le même cercle et ces 2 angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{NA}$ donc $\widehat{NOA}$ est égal à la moitié de $\widehat{NSA}$.

On a donc : $\widehat{NOA} = \dfrac{\widehat{NSA}}{2} = \dfrac{88°}{2} = 44°$

8 $\widehat{NSE}$ et sont 2 $\widehat{NIE}$ angles inscrits du même cercle $(\mathscr{C}_1)$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{NE}$ donc ces 2 angles sont égaux.

$\widehat{NIE}$ et $\widehat{AIC}$ sont opposés par leur sommet car (NC) et (AE) se coupent en I donc ces 2 angles sont égaux.

Enfin, $\widehat{AIC}$ et $\widehat{ARC}$ sont 2 angles inscrits du même cercle $(\mathscr{C}_2)$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ donc ces 2 angles sont égaux.

Il en résulte que tous les angles précédents sont égaux et en particulier : $\widehat{NSE} = \widehat{ARC}$.

9 $\widehat{RSE}$ et $\widehat{RAE}$ sont 2 angles inscrits du même cercle $(\mathscr{C}_2)$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{RE}$ donc ces 2 angles sont égaux.

$\widehat{RAE}$ et $\widehat{NRA}$ sont alternes internes car déterminés par la sécante (RA) qui coupe les droites (NR) et (AE) et comme (NR) et (AE) sont parallèles, ces 2 angles sont égaux.

Enfin, $\widehat{NRA}$ et $\widehat{NCA}$ sont 2 angles inscrits du même cercle $(\mathscr{C}_1)$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{NA}$ donc ces 2 angles sont égaux.

Il en résulte que tous les angles précédents sont égaux et en particulier : $\widehat{RSE} = \widehat{NCA}$.

On sait que $\widehat{RSE} = 40°$ donc $\widehat{NCA} = 40°$.

10 $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ERC}$ sont 2 angles inscrits du même cercle $(\mathscr{C}_2)$ et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{EC}$ donc ces 2 angles sont égaux.

$\widehat{ERC}$ et $\widehat{NRB}$ sont opposés par leur sommet car (EB) et (CN) se coupent en R donc ces 2 angles sont égaux.

Il en résulte que tous les angles précédents sont égaux et en particulier : $\widehat{EAC} = \widehat{NRB}$.

On sait que $\widehat{EAC} = 62°$ donc $\widehat{NRB} = 62°$

Enfin, $\widehat{NRB}$ est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O et $\widehat{NOB}$ est un angle au centre du même cercle et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{NB}$ donc $\widehat{NOB}$ est égal au double de $\widehat{NRB}$.

Ainsi, $\widehat{NOB} = 2 \times 62° = 124°$

Exercices d'approfondissement

1 Le mathématicien et astronome ***Eratosthène,*** (environ 280-198 av. J.-C.), avait évalué le rayon de la Terre à partir des observations suivantes:

À midi, le jour du solstice d'été, dans deux villes de l'actuelle Égypte : **Syène** (ville qui s'appelle aujourd'hui Assouan, sur le Nil) et **Alexandrie**, il observe les ombres.

A **Syène**, le Soleil est au zénith : les rayons du Soleil sont verticaux et l'on peut voir l'image du Soleil au fond d'un puits.

À **Alexandrie**, ville située sur le même méridien que Syène mais 800 km plus au nord, le Soleil est très haut dans le ciel mais pas au zénith. L'ombre d'un obélisque vertical permet de déterminer que le soleil est à 7,5° de la verticale.

Comme Eratosthène, vous avez tous les éléments pour déterminer approximativement le **rayon**, puis le **diamètre** et le **périmètre** de la Terre.

Expliciter le modèle choisi pour utiliser les données fournies.

2 La distance entre deux points A et B sur Terre se mesure le long d'un cercle dont le centre C est au centre de la Terre et dont le rayon est égal à la distance de C à la surface (voir figure). Le rayon moyen de la Terre est selon les mesures contemporaines d'environ 6341 Km.

a. Calculer la distance (en kilomètre) entre A et B si l'angle $\widehat{ACB} = 60°$.

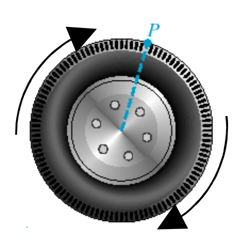
b. Si deux points A et B sont éloignés de 1000 Km, déterminer l'angle $\widehat{ACB}$ en degrés.

3 La Terre effectue une rotation complète autour de son axe en 23 heures, 56 minutes et 4 secondes. Son rayon moyen est selon les mesures contemporaines d'environ 6341 Km.

a. Calculer de **combien de degrés**, la terre tourne en **une seconde**.

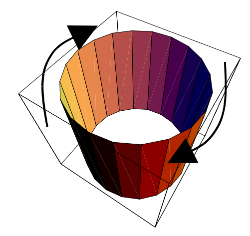
b. Calculer la distance parcoure (en mètre) pendant une seconde par un point P situé sur l'équateur, dû à la rotation de la Terre.

4 Une roue pour une petite voiture a un diamètre de 56 cm. Si le véhicule se déplace à une vitesse de 96 km/h, calculer le nombre de tours que la roue fait par seconde.

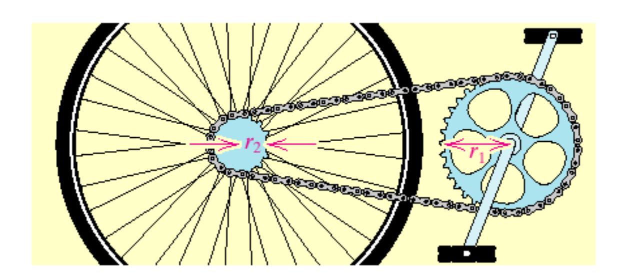


5 Un cylindre droit qui tourne autour de son axe est un modèle simple du coeur d'une tornade. Si une tornade a un coeur de 60 m de diamètre et que la vitesse maximale du vent à la périphérie du cœur est de 290 km/h (ou 80 m/s), calculer le nombre de tours que le coeur fait chaque seconde.





6 On considère la situation suivante:



a. Si le pignon de rayon r_1 tourne d'un angle de $\alpha_1°$ degré, trouver l'angle de rotation $\alpha_2°$ (en degré) correspondant du pignon de rayon r_2.

b. Un cycliste expérimenté peut atteindre une vitesse de 64 Km/h. Si la transmission par pignons a r_1 = 13 cm, r_2 = 5 cm, et si la roue a un diamètre de 71 cm, évaluer combien de tours par minute du pignon avant produira une vitesse de 64 Km/h.
Indication : convertir d'abord 64 Km/h en cm/s.

O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon coeur, comme une onde rafraîchissante.

Lautréamont, Les chants de Maldoror (1869)

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ cercle, centre, rayon, disque, sécante, tangente à un cercle, diamètre, arc de cercle, secteur de disque, segment circulaire
- ✔ angle inscrit dans un cercle, angle au centre

Savoirs-faire

- ✔ déterminer des angles dans des cercles
- ✔ savoir énoncer et démontrer:
  - ✔ théorème« angles inscrits »
  - ✔ théorème « angles au centre et inscrit »
- ✔ résoudre des problèmes en utilisant les outils ad-hoc

Chapitre 11 - Trigonométrie (tr. rect.)



La règle de Ptolémée
Source: http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr

Problème

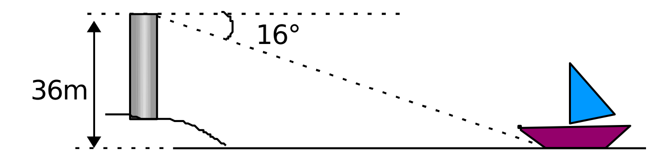
Les cinq maisons (Le problème d'Einstein):
5 hommes de nationalités différentes habitent 5 maisons de 5 couleurs différentes. Ils fument des cigarettes de 5 marques distinctes et boivent 5 boissons différentes. Ils élèvent des animaux de 5 espèces différentes. La question à laquelle il faut répondre est : "Qui élève les poissons ?"
Voici 15 indices :

* Indice 1 - Le Finlandais habite la première maison.
* Indice 2- L'Allemand habite la maison rouge.
* Indice 3 - La maison verte est située juste à gauche de la maison blanche.
* Indice 4 - Le Turc boit du thé.
* Indice 5 - Celui qui fume des «Poison» habite à côté de celui qui élève les chats.
* Indice 6 - Celui qui habite la maison jaune fume des «Bad».
* Indice 7 – Le Suisse fume des «Beurk».
* Indice 8 - Celui qui habite la maison du milieu boit du lait.
* Indice 9 - Celui qui fume des «Poison» a un voisin qui boit de l'eau.
* Indice 10 - Celui qui fume des «Schlecht» élève des oiseaux.
* Indice 11 - Le Suédois élève des chiens.
* Indice 12 - Le Finlandais habite à côté de la maison bleue.
* Indice 13 - Celui qui élève des chevaux habite à côté de la maison jaune.
* Indice 14 - Celui qui fume des «Mala» boit de la bière.
* Indice 15 - Dans la maison verte on boit du café.

98% de la population mondiale est supposée incapable de le résoudre! A vous de contredire cette légende!

Activité 1 Problème introductif

Du sommet d'une tour haute de 36 mètres au dessus du niveau de la mer, un bateau est observé avec un angle de dépression de 16°. A quelle distance se trouve de bateau de la tour ?



Expliquer pourquoi les outils de calcul géométrique dont nous disposons actuellement - angles, Pyhtagore, Thales - ne suffisent pas à résoudre ce problème.

Activité 2 Observation fondamentale

Soit :

- α un angle compris entre 0° et 90°
- ΔABC un triangle rectangle en *C*
- $<CAB = \alpha$

1. Choisir une valeur pour l'angle α et donner plusieurs exemples différents de triangles ΔABC vérifiant ces conditions.

2. Vocabulaire :

- le côté *[AB]* s'appelle ***l'hypoténuse***. C'est le côté opposé à l'angle droit;
- on dit que *[BC]* est ***le côté opposé*** à l'angle α ;
- on dit que *[AC]* est ***le côté adjacent*** à l'angle α. (C'est le côté qui n'est ni l'hypoténuse, ni le côté opposé à l'angle α).

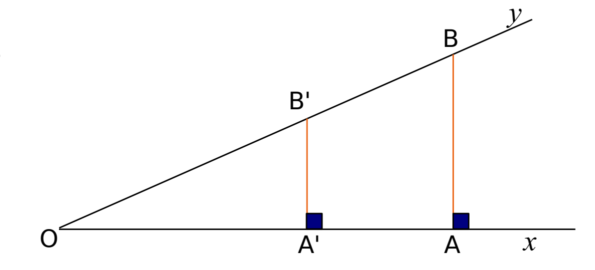
3. Que constate-t-on si on considère dans n'importe lequel de ces triangles le rapport entre le côté opposé à α et l'hypoténuse ?

4. Même question avec le rapport entre le côté adjacent à α et hypoténuse et avec le rapport entre le côté adjacent et le côté opposé.

5. Essayer à présent de calculer $\overline{BC}$ (sans dessiner le triangle) lorsque l'hypoténuse mesure 16 cm, et lorsque l'angle α correspond à celui que vous avez choisi en 1.

Activité 3 Démonstration

1. Sur la figure ci-contre, *A* et *A*' sont deux points de la demi-droite [*Ox*). Les perpendiculaires à [*Ox*) passant respectivement par *A* et *A*' coupent [*Oy*) en *B* et *B*'.



Démontrer que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$.



2. Cosinus et sinus d'un angle aigu

a. Démontrer, à l'aide de l'égalité précédente, que $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.

b. Démontrer que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$.

c. La valeur de ces quotients dépend-elle de la position de A' sur $[Ox)$? Si non, de quoi dépend-elle ? Conclure.

3. Tangente d'un angle aigu

a. Démontrer maintenant que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$.

b. De quoi dépend cette valeur ? Conclure.

Activité 4 A l'aide de la calculatrice

1. Calcul de la mesure d'un angle

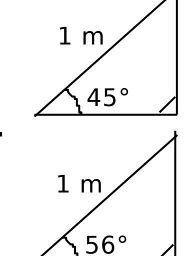
T
2,5 cm
30°
S
5 cm
R

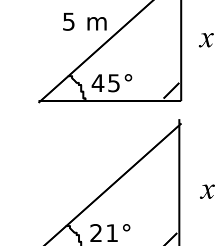
a. Quelle est l'hypoténuse du triangle ΔRST rectangle en T ?
Que représente le côté *[TS]* pour l'angle donné ?

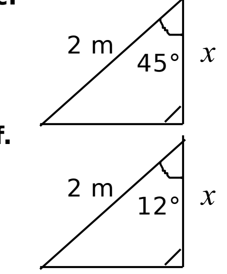
b. Écrire l'égalité reliant l'angle $\sphericalangle TRS$ et les longueurs $\overline{SR}$ et $\overline{TS}$.
Avec la calculatrice, calculer sin(30°). Comparer avec le résultat trouvé à l'aide de $\overline{SR}$ et $\overline{TS}$.
Retrouver la mesure de l'angle $\sphericalangle TRS$ en utilisant la touche « $\sin^{-1}$ ».

2. Calculer x à l'aide de la calculatrice et donner les résultats arrondis au millième :

a. **b.** **c.**
d. **e.** **f.**

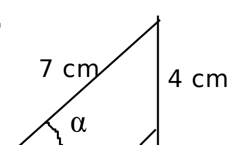




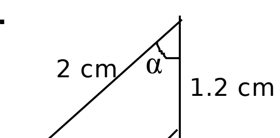


3. Calculer α à l'aide de la calculatrice et donner les résultats arrondis au millième :

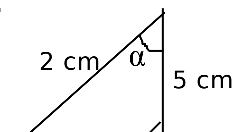
a.



b.

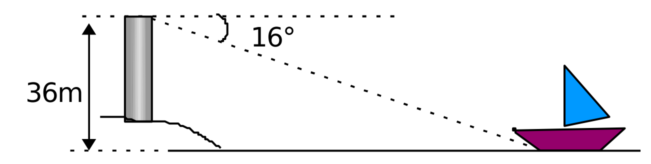


c.



Activité 5 Retour au problème introductif... le résoudre !

Du sommet d'une tour haute de 36 mètres au dessus du niveau de la mer, un bateau est observé avec un angle de dépression de 16°. A quelle distance se trouve de bateau de la tour ?



Activité 6 D'autres problèmes

1. La ficelle tendue d'un cerf-volant mesure 200 mètres. Elle fait un angle de 63° avec l'horizontale. A quelle hauteur se trouve le cerf-volant ?

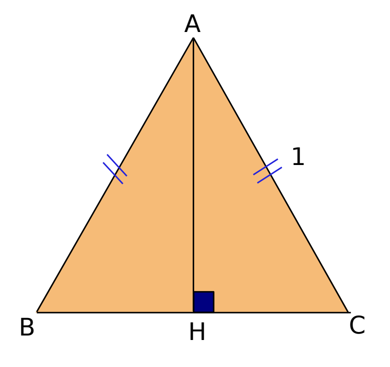
2. Un constructeur désire ériger une rampe de 7,2 m de long qui atteigne une hauteur de 1,5 m par rapport au sol. Calculer l'angle que la rampe devrait faire avec l'horizontale.

3. Un vélideltiste vole à 1200 m au dessus du sol. Il voit un clocher dans une direction qui fait un angle de 40° au dessous de son horizontale. La hauteur du clocher est de 30 m. A quelle distance de la girouette située au sommet du clocher se trouve-t-il ?

Activité 7 Valeurs exactes

Pour certains angles, on peut déterminer les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente:

1. Angle de 30° et angle de 60°

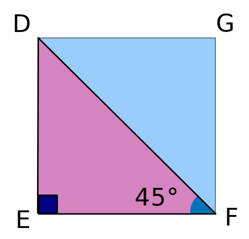


a. Le triangle ΔABC est un triangle équilatéral de côté 1 et le point *H* est le milieu du côté *[BC]*. En déduire la longueur de *[BH]*.

b. Calculer la valeur exacte de $\overline{AH}$.

c. Dans le triangle ΔABH rectangle en *H*, déterminer les valeurs exactes de sin (30°), cos (30°), tan (30°), sin (60°), cos (60°) et tan (60°).

2. Angle de 45°



a. Le quadrilatère *DEFG* est un carré de côté 1, donc le triangle ΔDEF est rectangle en *E* et isocèle.

b. Calculer la valeur exacte de $\overline{DF}$.

c. Déterminer les valeurs exactes de sin (45°), cos (45°) et tan (45°).

3. Vérifier que la calculatrice donne bien les mêmes résultats, mais en valeur approchée !

Activité 8 Application

Calculer en valeur exacte les côtés manquants des triangles ΔABC rectangles en C dans les cas suivants :

1. $\alpha=45°$ $\overline{AB}=7$

2. $\beta=60°$ $\overline{AC}=8$

3. $\alpha=45°$ $\overline{AC}=7$

4. $\beta=60°$ $\overline{AB}=8$

Activité 9 Relations trigonométriques

Démontrer les deux théorèmes suivants :

1. **Théorème** : Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

2. **Théorème** : Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

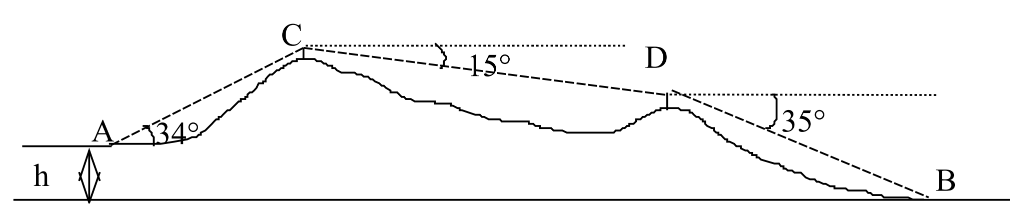
Remarque : L'expression $[\sin(\alpha)]^2$ (*sinus de alpha au carré*) s'écrit en général $\sin^2(\alpha)$.

Activité 10 Problèmes plus difficiles...

1. Simon se trouve sur une falaise, 135 mètres au dessus du niveau de la mer. Il mesure l'angle compris entre son horizontale et l'horizon visible et trouve 0,375°. Il prétend pouvoir alors calculer le rayon de la Terre. Comment s'y prendra-t-il ?

2. Calculer l'altitude h du point A, et la distance à vol d'oiseau entre les points A et B:

$\overline{CD} = 180\text{m}$, $\overline{AC} = 100\text{m}$, $\overline{BD} = 70\text{m}$



3. Quelle est la longueur du 36ème parallèle terrestre?
(remarque: rayon de la Terre $\simeq$ 6371km)

4. Simon remarque depuis sont balcon que la Lune est à son zénith. A cet instant, il reçoit un télégramme de sa cousine Bernadette qui habite à 9904 km de là et qui tient à lui décrire le merveilleux lever de Lune sur l'océan qu'elle est en train d'admirer. Simon se dit immédiatement qu'il va ainsi pouvoir calculer la distance entre la Terre et la Lune ! Comment va-t-il procéder ? (remarque: rayon de la Terre $\simeq$ 6371km)

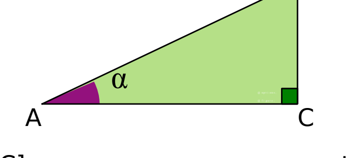
5. Simon, toujours en éveil, remarque alors qu'il voit lui aussi la Lune. Il mesure l'angle sous lequel il la voit et obtient 0,52°. Il se dit qu'il va en profiter pour calculer aussi le rayon de la Lune. Comment va-t-il procéder, en connaissant la distance Terre-Lune (bord à bord) calculée dans l'exercice 4, soit 385652,3 km environ ?

A savoir 1 Relations liant angles et longueurs dans un triangle

Vocabulaire

Soit :

- α un angle compris entre 0° et 90°
- ΔABC un triangle rectangle en C
- $<CAB=\alpha$



On dit que [BC] est **le côté opposé** à α, [AC] est **le côté adjacent** à α et [AB] est **l'hypoténuse** du triangle ΔABC .

Remarques

- Si [BC] est le côté opposé à l'angle α , il est le côté adjacent de l'angle β .
- Un angle non-droit d'un triangle est délimité par deux côtés dont l'un est l'hypoténuse : on peut donc parler sans ambiguïté du côté adjacent d'un angle non-droit d'un triangle rectangle.

Définitions

- □ $\sin(\alpha)=\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}=\frac{BC}{AB}$ (on dit **sinus** de alpha)
- □ $\cos(\alpha)=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}=\frac{AC}{AB}$ (on dit **cosinus** de alpha)
- □ $\tan(\alpha)=\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}=\frac{BC}{AC}$ (on dit **tangente** de alpha)

Ces définitions ont un sens grâce au théorème de Thalès, puisque quel que soit le triangle rectangle en C tel que $<CAB=\alpha$, les rapports $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{BC}{AC}$ sont constants, et ils ne dépendent que de l'angle α ; on peut donc les nommer respectivement $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$.

Remarque

On note aussi la tangente de alpha $tg(\alpha)$ à la place de $\tan(\alpha)$.

Trucs mnémotechniques

sin-opp-hyp / cos-adj-hyp / tan-opp-adj -> « sinopip-cosadgip-tanopadg »

sin-opp-hyp / cos-adj-hyp / tan-opp-adj -> SOHCAHTOA (attention de mettre les H au bons endroits!)

Théorème

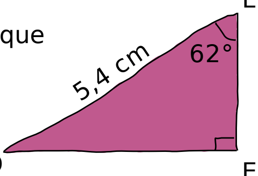
Si 0°< α <90° , alors on a : 0 < sin(α) < 1 et 0 < cos(α) < 1.

A savoir 2 Utiliser les relations liant angles et longueurs

Calculer des longueurs

Exemple 1 : on considère un triangle ΔLEO rectangle en E tel que LO = 5,4 cm et $\widehat{ELO}$ = 62°.

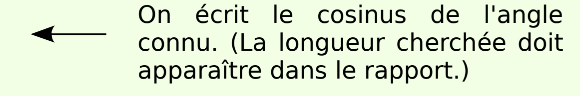
Calculer la longueur du côté [EL] arrondie au millimètre.



Dans le triangle ΔLEO rectangle en E, [LO] est l'hypoténuse ; [EL] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ELO}$. On doit utiliser le cosinus de l'angle $\widehat{ELO}$.
⟵ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\cos(\widehat{ELO}) = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos(\widehat{ELO}) = \frac{EL}{LO}$


⟵ On écrit le cosinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

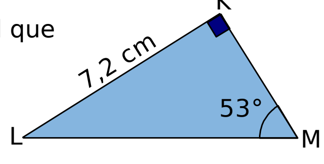
$EL = LO \times \cos(\widehat{ELO})$ ⟵ On applique la règle des produits en croix.

$EL = 5,4 \times \cos(62°)$ ⟵ On saisit 5,4 × 2nd->trig->cos 62

$EL \approx 2,5$ cm. ⟵ EL est inférieure à LO. Le résultat est cohérent.

Exemple 2: on considère ΔKLM un triangle rectangle en K tel que KL = 7,2 cm et $\widehat{LMK}$ = 53°.

Calculer la longueur du côté [LM] arrondie au millimètre.



Dans le triangle ΔKLM rectangle en K, [LK] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LMK}$; [LM] est l'hypoténuse. On doit utiliser le sinus de l'angle $\widehat{LMK}$.
⟵ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\sin(\widehat{LMK}) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin(\widehat{LMK}) = \frac{KL}{LM}$

⟵ On écrit le sinus de l'angle connu. (La longueur cherchée doit apparaître dans le rapport.)

$LM = \frac{KL}{\sin(\widehat{LMK})}$ ⟵ On applique la règle des produits en croix.

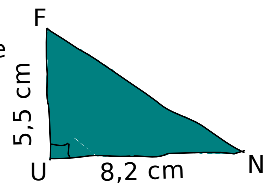
$LM = 7,\frac{2}{\sin(53°)}$ ⟵ On saisit 7,2 ÷ 2nd->trig->sin 53.

$LM \approx 9$ cm. ⟵ LM est supérieure à KL. Le résultat est cohérent.

Calculer la mesure d'un angle

Exemple: soit ΔFUN un triangle rectangle en U tel que UN = 8,2 cm et UF = 5,5 cm.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.



Dans le triangle ΔFUN rectangle en U, [FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$; [UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$. On doit utiliser la tangente de l'angle $\widehat{UNF}$.

← On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{UF}{UN}$

← On écrit la tangente de l'angle recherché.

$\tan(\widehat{UNF}) = \dfrac{5{,}5}{8{,}2}$

← On saisit 2nd->trig->tan^{-1} (5,5 ÷ 8,2).

$\widehat{UNF} \approx 34°$.

A savoir 3 Théorèmes

Théorème (angles complémentaires)

Si α et β sont deux angles complémentaires, alors on a :

- $\sin(\alpha)=\cos(\beta)$
- $\cos(\alpha)=\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\beta)}$

Théorème (formule de la tangente)

Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Théorème (formule fondamentale)

Si $0° < \alpha < 90°$, alors on a : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

Notation : $[\sin(\alpha)]^2 = \sin^2(\alpha)$.

A savoir 4 Utiliser les formules de trigonométrie

Exemple **:** calculer la valeur exacte de sin(α) et tan(α) sachant que α est un angle aigu tel que cos(α)= 0,8.

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.
  Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin(\alpha) = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

A savoir 5 Valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente de certains angles

angle	sinus	cosinus	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

A savoir 6 Etymologies

□ trigonométrie : du grec treis, tria, trois, gonia, angle et metron, mesure (mesure des trois angles).En grec , le mot trigone, désigne un triangle.

□ sinus : du sanscrit jiva (jya), corde d'arc, utilisé par le mathématicien indien Aryabhata (476-550)dans son ouvrage Aryabhatiya achevé en 499. Passé à l'arabe jîba (mot qui n'a pas de signification en arabe) par le mathématicien arabe Al-Fazzari (VIIème s.) puis par erreur à jaîb, poche, repli de vêtement lors de sa traduction en latin par Gérard de Crémone (1114-1187) qu'il traduit alors en latin par sinus, pli, courbure (qui a également donné le mot "sein").
C'est REGIOMONTANUS (Allemand, 1436-1476) qui utilisa au 15ème siècle le mot sinus au sens où on l'entend maintenant.

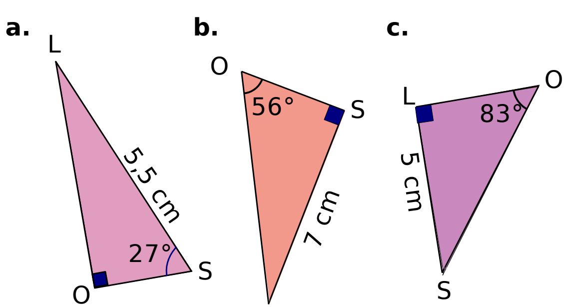
□ cosinus : du latin cum, avec et du mot sinus.

□ tangente : du latin tangere, toucher.

Source : http://trucsmaths.free.fr

Exercices d'entraînement

1 Dans chaque cas, calculer la valeur arrondie au dixième des longueurs manquantes:.

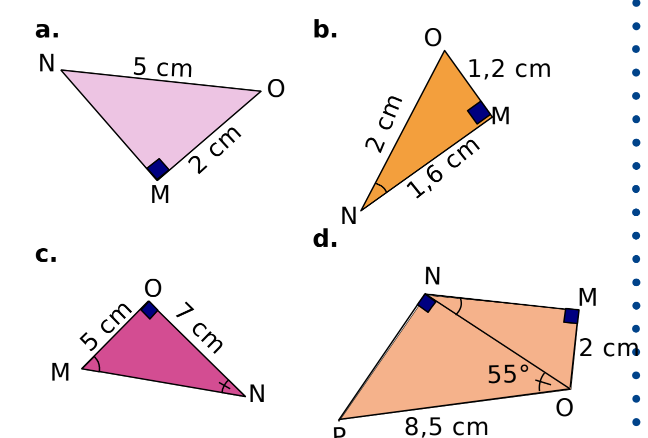


2 Construire un triangle ΔABC tel que $\overline{AB}$ = 4,5 cm, $\sphericalangle BAC$ = 27° et $\sphericalangle CBA$ = 63°.

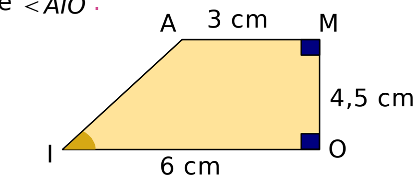
a. Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?

b. Calculer les longueurs $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ arrondies au dixième.

3 Dans chaque cas, calculer la mesure de l'angle $\sphericalangle MNO$; donner la valeur arrondie au degré.



4 À l'aide des informations de la figure, calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\sphericalangle AIO$.



5 Quand le sommet de la tour Eiffel est vu d'une distance de 60m à partir de la base, l'angle d'élévation est de 79,2°.

Estimer la hauteur de la tour Eiffel au mètre près.

6 *Relations entre sinus, cosinus et tangente*

Soit ΔMOT un triangle rectangle en M.

a. Que peut-on dire des angles $\sphericalangle MTO$ et $\sphericalangle TOM$?

b. Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\sphericalangle MTO$ et $\sphericalangle TOM$ en fonction des côtés $\overline{MO}$, $\overline{OT}$ et $\overline{MT}$.

c. Utiliser la question **b.** pour écrire trois égalités.

d. Déduire de ces égalités deux propriétés sur les angles complémentaires d'un triangle rectangle.

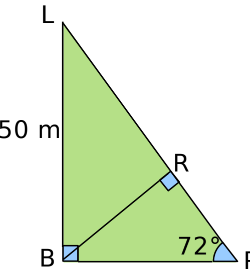
7 Soit ΔHIJ un triangle rectangle en H . On a $\overline{IJ}$ = 4,75 cm et $\sphericalangle IJH$ = 65,8° .

Calculer $\overline{IH}$, $\overline{JH}$ et $\sphericalangle JIH$.

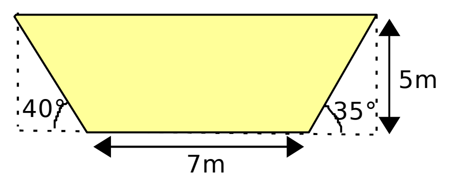
8 Rafaël et Léo nagent pour atteindre la bouée P. Ils sont respectivement en position R et L.

On a $\overline{BL}$ = 50 m et $\sphericalangle BPL$ = 72°.

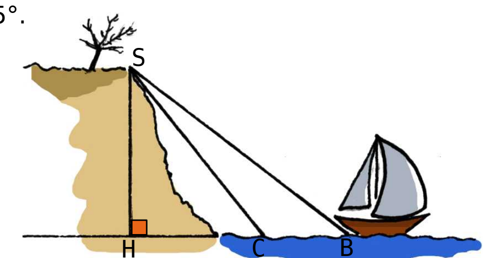
Calculer la distance entre les deux nageurs arrondie au mètre.



9 Calculer l'aire de ce trapèze :



10 Charlotte navigue le long d'une falaise. Pour des questions de sécurité, elle ne doit pas aller au delà du point C. Elle a jeté l'ancre au point B.
On a $\overline{SH}$ = 100 m, $\sphericalangle HCS$ = 75° et $\sphericalangle HBS$ = 65°.

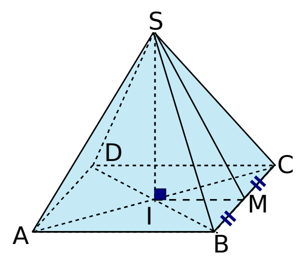


À quelle distance du point C le bateau de Charlotte se trouve-t-il ? Donne la valeur approchée par excès au dixième de mètre près.

11 Soit ΔEFG un triangle isocèle en *F*. On a $\overline{EG}$ = 42 cm et $\sphericalangle EFG$ = 62°.

Calculer l'aire de ΔEFG .

12 *SABCD* est une pyramide régulière dont la base est le carré *ABCD* de côté 230 m et de centre I. La hauteur *[SI]* de la pyramide a pour longueur $\overline{SI}$ = 147 m. *M* est le milieu de *[BC]*.

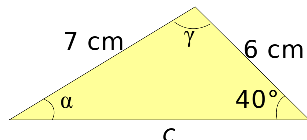


a. Calculer le volume de la pyramide.

b. Calculer les mesures des angles $\sphericalangle SAI$ et $\sphericalangle SMI$ arrondies au degré près.

13 Au centre d'un bassin carré de 12 mètres de côté se trouve un jet d'eau dont l'extrémité apparaît, depuis l'un des sommets du carré, sous un angle d'élévation de 52°. Quelle est sa hauteur?

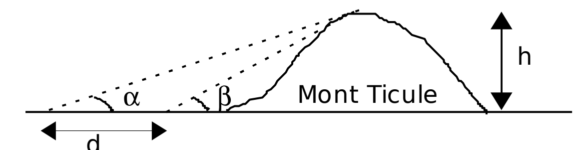
14 Donner des approximations au dixième des angles et longueurs manquants du triangle suivant :



15 Calculer la valeur exacte de sin(β) et de tan(β) sachant que β est un angle aigu tel que cos(β)= $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

16 Pour déterminer la hauteur du Mont Ticule, Sophie a mesuré les angles α , β et la distance *d*.

Calculer *h* en sachant que α = 30°, β = 45° et *d* = 200m.



Exercices supplémentaires

17 Quelle est la longueur de l'ombre projetée par un arbre de 12m de haut lorsque le Soleil est élevé de 52° au-dessus de l'horizon ?

18 Soit ΔRST un triangle rectangle en *R*. On a $\overline{ST}$ = 25,43 cm et $\overline{RT}$ = 12,30 cm.

Calculer $\sphericalangle RST$ et $\overline{RS}$.

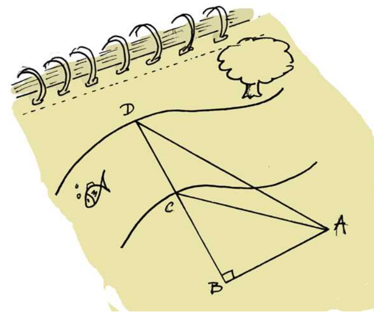
19 Elsa joue au cerf-volant sur la plage. La ficelle est déroulée au maximum et est tendue. L'angle de la ficelle avec l'horizontale est de 48°. Elle tient son dévidoir à 60 cm du sol. Le cerf-volant vole à 12 m du sol.

a. Faire un schéma de la situation.

b. Calculer la longueur de la ficelle déroulée. Donner la valeur arrondie au décimètre.

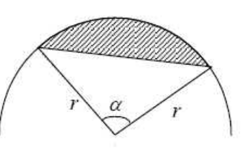
20 Monsieur Schmitt, géomètre, doit déterminer la largeur d'une rivière. Voici le croquis qu'il a réalisé :

$\overline{AB}$ = 100 m ;
$\sphericalangle BAD$ = 60° ;
$\sphericalangle BAC$ = 22° ;
$\sphericalangle ABD$ = 90°.



Calculer la largeur de la rivière à un mètre près.

21 a) Exprimer l'aire *A* de la surface hachurée en fonction de *r* et α.



b) Calculer *A* lorsque *r* = 10 cm et α = 60°.

22

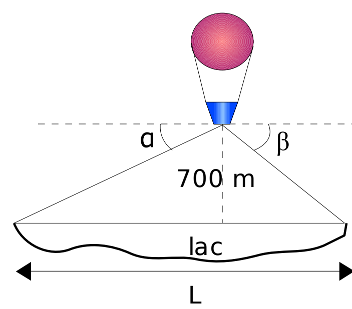
a. Calculer sin(α) et tan(α) sachant que cos(α) = 4/7.

b. Calculer cos(α) et tan(α) sachant que sin(α) = 3/8.

c. Calculer cos(α) et sin(α) sachant que tan(α) = 6.

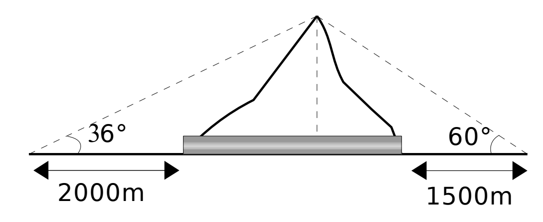
d. Calculer cos(α) et tan(α) sachant que sin(α) = 4/3.

23 Un ballon vole à une altitude de 700 m en survolant un lac. Si les angles de dénivellation des rives du lac sont α = 48° et β = 39°, trouver la largeur L du lac.

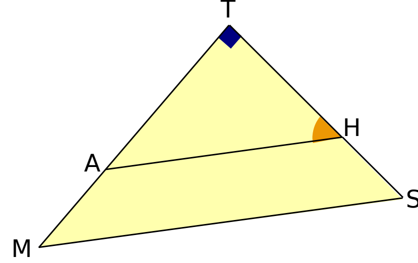


24 On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 3225m de haut. A une distance de 2000m de la base de la montagne l'angle d'élévation est de 36°. Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 1500m est de 60°.

Calculer la longueur du tunnel.



25 Soit le triangle ΔMTS tel que $\overline{MS}$ = 23 cm et $\overline{TM}$ = 15 cm. Les droites *(AH)* et *(MS)* sont parallèles.



a. Écrire les rapports de longueurs qui sont égaux en justifiant.

b. Écrire la relation donnant le sinus de l'angle $<AHT$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** la mesure arrondie au degré de l'angle $<AHT$.

26 Calculer la valeur exacte de cos(γ) et de tan(γ)sachant que γ est un angle aigu tel que sin(γ)= $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Réponses des exercices supplémentaires

17 La longueur de l'ombre est de 9,4 m.

18 $<RST \approx 28{,}93°$ et $\overline{RS} \approx 22.26$ cm

19 La longueur de la ficelle est de 15,3 m.

20 La largeur de la rivière est de 133 m.

21

a. $A=\frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin(\alpha)=r^2\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\pi}{360°}-\frac{\sin(\alpha)}{2}\right)$

b. A ≈ 9,06 cm².

22

a. $\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-(\frac{4}{7})^2}=\frac{\sqrt{33}}{7}$

et $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\sqrt{33}}{4}$

b. $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{55}}{8}$ et $\tan(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{55}}=\frac{3\cdot\sqrt{55}}{55}$

c. $\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{37}}=\frac{\sqrt{37}}{37}$ et $\sin(\alpha)=\frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}$

d. impossible car $\sin(\alpha)=\frac{4}{3}>1$

23 L ≈ 1495 m

24 La longueur du tunnel est d'env. 2801 m.

25

a. $\Delta ATH \sim \Delta MTS$

donc par Thalès : $\frac{\overline{TA}}{\overline{TM}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{MS}}=\frac{\overline{TH}}{\overline{TS}}$

b. $\sin(<AHT)=\frac{\overline{TA}}{\overline{AH}}$

c. $\frac{\overline{TA}}{\overline{TM}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{MS}}$ => $\frac{\overline{TA}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{TM}}{\overline{MS}}=\frac{15}{23}$

d'où $<AHT=\sin^{-1}(\frac{\overline{TA}}{\overline{AH}})=\sin^{-1}(\frac{15}{23})\approx 41°$

26 $\cos(\gamma)=\frac{\sqrt{8+4\cdot\sqrt{3}}}{4}$ et $\tan(\gamma)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8+4\cdot\sqrt{3}}}$

27 *Quelques repères historiques*

Quand on parle de trigonométrie, on associe nécessairement le mot aux fonctions cosinus, vues en 4e, puis sinus et tangente, vues en 3e pour le calcul de longueurs ou d'angles dans le triangle.



Aujourd'hui, l'usage de la calculatrice est incontournable lorsqu'on applique ces fonctions. Mais si l'on remonte à la fin des années 70, les collégiens ne disposaient pas encore de calculatrice et devaient se munir de tables trigonométriques pour effectuer les calculs.

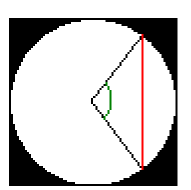
angle (en degrés)	cosinus de l'angle	sinus de l'angle	angle (en degrés)	cosinus de l'angle
0	1,0000	0,0000	30	0,86
1	0,9998	0,0175	31	0,85
2	0,9994	0,0349	32	0,84
3	0,9986	0,0523	33	0,83
4	0,9976	0,0698	34	0,82
5	0,9962	0,0872	35	0,81
6	0,9945	0,1045	36	0,80
7	0,9925	0,1219	37	0,79
8	0,9903	0,1392	38	0,78

Dans l'*Encycl*opédie (1751), Jean le Rond d'Alembert (1717 ; 1783) définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ». C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège. Et pourtant la trigonométrie n'est pas à l'origine un outil de calcul du triangle mais du cercle.

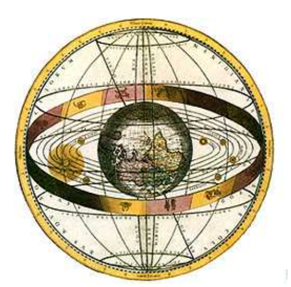
Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.

L'héritage de ces tables données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribuera à l'introduction du partage du cercle en 360°.

Eratosthène de Cyrène (-276 ; -196) et Aristarque de Samos (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur). Mais on attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec Claude Ptolémée (90? ; 160?) poursuit dans l'Almageste les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie. Ptolémée croyait au géocentrisme : le terre est le centre de l'univers, tous les astres gravitent autour d'elle. Il faudra attendre le XVIe siècle pour rétablir la vérité pourtant déjà connue de Pythagore de Samos (-569 ; -475) au Ve siècle avant J.C.



La terre, centre de l'univers selon Ptolémée

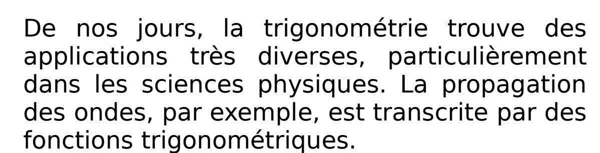


La règle de Ptolémée

En Orient, l'indien Aryabhata l'Ancien (476 ; 550) utilise la demi corde et donne les premières tables de sinus. On retrouve la configuration du sinus dans le triangle rectangle telle qu'elle est enseignée aux collégiens aujourd'hui. Aryabhata est le premier à voir la trigonométrie hors du cercle.

Dès le XIIIe siècle, les arabes, tel que le perse Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850) traduisent les ouvrages provenant d'Orient. Mohammed al Battani (850 ; 929) introduit les tables de tangentes et de nouvelles formules, puis après lui Muhammad Abu'l-Wafa (940 ; 998) précise encore ces tables. Avec le perse al Tusi (1201-1274), la trigonométrie se sépare de l'astronomie.

Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques.
Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.



Regiomontanus

Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

Source : http://ymonka.free.fr/maths-et-tiques/index.php/histoire-des-maths/geometrie/la-trigonometrie

Elle (la géométrie) est, pour ainsi dire, la mesure la plus précise de notre esprit, de son degré d'étendue, de sagacité, de profondeur, de justesse.

Jean le Rond d' Alembert

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ relations liant angles et longueurs des côtés dans le triangle rectangle (sin, cos, tan)
- ✔ formules de base de la trigonométrie : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- ✔ relations trigonométriques entre sinus, cosinus et tangente des angles complémentaires
- ✔ valeurs exactes des sinus, cosinus et tangente de 30°, 45° et 60°

Savoir-faire

- ✔ savoir utiliser la calculatrice pour déterminer des sinus/cosinus/tangente et des angles (avec les arrondis et notations appropriés)
- ✔ savoir démontrer les formules : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- ✔ résoudre des problèmes faisant appel à la trigonométrie
- ✔ utiliser à bon escient les outils géométriques en fonction du problème donné : Pythagore, Thalès, trigonométrie

Chapitre 12 - Géométrie analytique

297

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

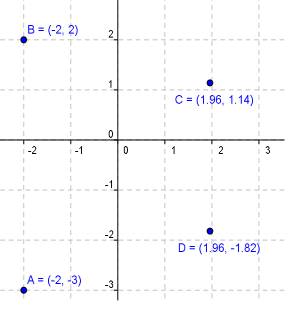
Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Première page du livre de René Descartes, "La Géométrie".

Problème

Une île est peuplée de sages qui disent toujours la vérité, et de menteurs qui mentent toujours.
Un homme A rencontre sur cette île un homme B et lui demande « Qui es-tu ? ». B répond « Je suis un menteur ». B peut-il être un habitant de cette île ?
Quelle unique question peut-on poser à un habitant de cette île pour déterminer s'il est un sage ou un menteur ?
F et G sont des sages. A annonce que B affirme que C assure que D dit que E insiste sur ce qui F nie que G soit un sage. Si A est un menteur, alors combien y a-t-il de menteurs parmi ces sept personnes ?

Activité 1 Mesurer des distances



1. Quelle est la distance entre les points A et B représentés ci-contre ? Entre C et D ?

2. Quelle est la distance entre les points suivants :

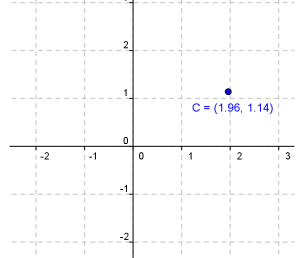
a. $E=(13;0)$ et $F=(29;0)$

b. $G=(-16;5)$ et $H=(-\frac{3}{4};5)$

c. $I=(1,13;\frac{9}{5})$ et $J=(1,13;-2)$

d. $K=(0;-29,8)$ et $L=(0;17)$

3. Quelle méthode peut-on définir pour déterminer la distance entre deux points alignés verticalement ou horizontalement à partir des coordonnées ?



4. On veut déterminer la distance entre les points A et C.

a. Placer pour commencer un point M qui a la même abscisse que A et la même ordonnée que C.

b. Déterminer la distance entre M et A, puis entre M et C.

c. Finalement, calculer la distance entre A et C.

5. Donner la formule générale qui permet de calculer la distance entre un point $A_1=(x_1;y_1)$ et $A_2=(x_2;y_2)$ donnés.

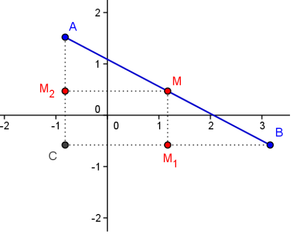
6. Déterminer le périmètre et l'aire des polygones dont les sommets sont :

a. $A=(0;5)$, $B=(7;3)$, $C=(0;1)$, $D=(-7;3)$

b. $A=(6;6)$, $B=(9;2)$, $C=(2;4)$

c. $A=(3;4)$, $B=(-2;-4)$, $C=(-8;-3)$, $D=(-5;3)$

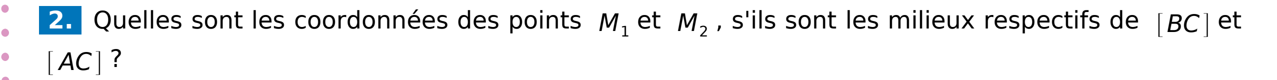
Activité 2 Au milieu du segment



On veut déterminer où se trouve exactement le point milieu du segment $[AB]$ avec $A=(x_1;y_1)$ et $B=(x_2;y_2)$ donnés.

1. Quelles sont les coordonnées du point C, s'il est aligné verticalement avec le point A et horizontalement avec le point B ?

2. Quelles sont les coordonnées des points M_1 et M_2, s'ils sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$?



3. Quel argument est nécessaire pour prouver que le point M est bien le milieu du segment $[AB]$? Terminer la démonstration.

4. Quelles sont les coordonnées des points milieu des segments $[AB]$ suivants ?

a. $A=(-4;2)$, $B=(4;8)$

b. $A=(61;-149)$, $B=(1228;-73)$

c. $A=(-\frac{15}{3};\frac{9}{7})$, $B=(\frac{31}{7};\frac{1}{3})$

5. Trouver le point B tel que $M=(4;8)$ soit le milieu du segment $[AB]$ avec $A=(-3,4;1)$.

Activité 3 Des équations et des courbes

1. On considère une équation à deux inconnues $y=3x+2$. Une solution de cette équation est un couple de nombres $(x;y)$ qui vérifie cette équation. Trouver deux solutions de cette équation.

2. Compléter le tableau suivant, qui contient des solutions de l'équation:

x	– 6	– 4	– 1,5	0	2,5	5			
y							-1	0	3

3. Sur une feuille de papier quadrillée, construire un repère orthogonal et placer avec un maximum de précision tous les points de coordonnées $(x;y)$ de ce tableau.

4. Que constatez-vous ? Est-ce que cela a un sens de relier les points entre eux ? Justifier votre réponse.

5. On considère une équation à deux inconnues $y=x^2-2x+1$. Trouver deux solutions de cette équation.

6. Compléter le tableau suivant, qui contient des solutions de l'équation:

x	– 6	– 4	– 1,5	0	2,5	5			
y							-1	0	3

7. Sur une feuille de papier quadrillé, construire un repère orthogonal et placer avec un maximum de précision tous les points de coordonnées $(x;y)$ de ce tableau.

8. Que constatez-vous ? Est-ce que cela a un sens de relier les points entre eux ? Justifier votre réponse.

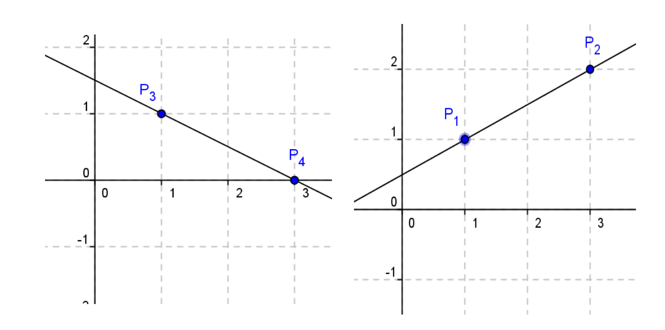
9. Exemples plus complexes avec GeoGebra: tracer une représentation graphique des équations suivantes:

a. $2x^2-3y^2-4x-12y=13$

b. $2x^2+6y^2-4x+24y=-25$

Activité 4 Pentes

1. On considère les situations suivantes:



Donner la définition et la valeur de la pente entre les points P_1 et P_2 et entre les points P_3 et P_4 ?

2. Déterminer la pente des segments dont les extrémités sont

a. $A=(-2;3)$, $B=(4;5)$ **b.** $A=(4;-6)$, $B=(-8;4)$ **c.** $A=(-4;0)$, $B=(3;-5)$

3. Quelle est la pente d'une droite horizontale ? Et celle d'une droite verticale?

4. Un téléphérique part de la station du village à l'altitude de 1200m pour arriver à la station du somment à 3457m. Quelle est la pente entre les deux stations? Donner aussi la réponse en %.

Activité 5 Représenter des équations avec GeoGebra

1. Le logiciel GeoGebra

a. GeoGebra est un logiciel dynamique libre, gratuit et multi-plateformes de mathématiques réunissant géométrie, algèbre et calcul différentiel. Pour l'utiliser, lancer un navigateur – par exemple Firefox - à l'adresse http://www.geogebra.org puis cliquer sur « Démarrage en ligne ».

b. Utiliser la ligne de saisie qui se trouve en bas de l'écran pour définir les équations que vous souhaitez représenter; par exemple, taper « $y=2x+1$ », puis la touche « enter ».

2. Différents types d'équations

a. Voici une série d'équations à deux inconnues:

- $y=x+5$
- $x^2+y^2-2y=0$
- $y=2x^2-3$
- $y=x^2+x$
- $-3x=y+1$
- $x^2=y$
- $2x+2y-4=0$
- $x=0.5$
- $y=3$
- $y+x^2-2=0$

b. Observer les équations ci-dessus et les classer par familles selon le tableau qui suit. A vous de choisir les critères de chaque famille:

Équations d'une famille :	Signes particuliers des équations de cette famille :	Garder une colonne pour la suite.
...	...	...

c. Représenter à l'aide de GeoGebra toutes les équations ci-dessus.

d. Observer les courbes obtenues et compléter la dernière colonne:

Équations d'une famille :	Signes particuliers des équations de cette famille :	Signes particuliers des courbes de cette famille :
...	...	...

Activité 6 Premières courbes

a. Représenter les équations suivantes avec GeoGebra:

- $y=3x-2$
- $y=-x$
- $2x+2y=0$
- $y=x+1$
- $x+y+1=0$
- $x+2y-3=0$

b. Utiliser les menus déroulants pour trouver le moyen de calculer la pente de chacune de ces droites. Que peut-on conjecturer quant au lien entre la pente et l'équation donnée?

c. On appelle **ordonnée à l'origine** d'une droite d la seconde coordonnée du point d'intersection entre d et Oy. Déterminer l'ordonnée à l'origine de chacune des représentations et établir le lien avec les équations de départ.

d. Classifier toutes les équations possibles de droites du plan.

Activité 7 Droites perpendiculaires

1. Prenons deux droites perpendiculaires passant par l'origine: $d_1 : y=m_1 x$ et $d_2 : y=m_2 x$. Faire un croquis de la situation et placer deux points $P_1 \in d_1$ et $P_2 \in d_2$ différents de l'origine.

2. Si x_1 est la première coordonnée de P_1 et x_2 celle de P_2, déterminer les secondes coordonnées de ces deux points.

3. Déterminer la distance entre l'origine et le point P_1, puis entre l'origine et P_2.

4. Déterminer la distance entre les points P_1 et P_2.

5. Développer et réduire afin de conclure.

Activité 8 Le B-A-BA

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points A(1;2) et B(-3;2).

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points C(-3;2) et D(-3;-4).

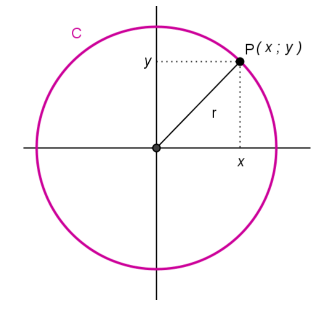
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points E(-4;2) et F(3;6).

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point G(-3;2) et parallèle à la droite d'équation 2x + 3 y -1 = 0

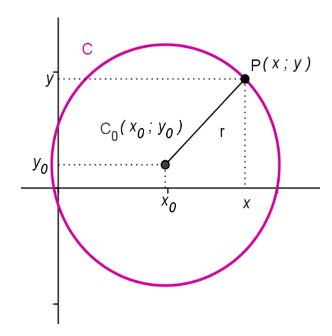
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point G(-3;2) et perpendiculaire à la droite d'équation 2x + 3 y -1 = 0

Activité 9 Cercles

1. Quelle est l'équation d'un cercle de centre $C_0=(0;0)$ et de rayon r ?



2. Quelle est l'équation générale d'un cercle de centre $C_0=(x_0;y_0)$ et de rayon r ?



3. Déterminer l'équation du cercle c de centre C(2;-4) et tangent à l'axe des ordonnées. Donner 4 points qui appartiennent à ce cercle.

4. Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles suivants :

a. $c\ :\ x^2+y^2-25=0$

b. $c\ :\ x^2+y^2+36=0$

c. $c\ :\ x^2+y^2+4x-2y+9=0$

d. $c\ :\ 2x^2+2y^2-2x+10y+11=0$

5. Déterminer les points de coordonnées $(a;a)$ qui sont à une distance 3 du point $P=(-2;1)$.

Activité 10 Nouvelles courbes

1. Représenter toutes les équations suivantes:

a. $y=(x-2)^2$ **b.** $y=(x-3)^2$ **c.** $y=(x-5)^2$ **d.** $y=(x+3)^2$

2. Qu'en déduire quant à la représentation graphique des équations de la forme $y=(x-k)^2$?
[où k est une constante réelle quelconque; x et y des variables réelles]

3. Représenter toutes les équations suivantes:

a. $y=3(x-2)^2$ **b.** $y=8(x-2)^2$ **c.** $y=0.5(x-2)^2$ **d.** $y=-2(x-2)^2$

4. Qu'en déduire quant à la représentation graphique des équations de la forme $y=a(x-k)^2$?
[où k et a sont des constantes réelles quelconques; x et y des variables réelles]

5. Représenter toutes les équations suivantes.

a. $y=2(x-2)^2+1$ **b.** $y=2(x-2)^2+3$ **c.** $y=2(x-2)^2+1.5$ **d.** $y=2(x-2)^2-3$

6. Qu'en déduire quant à la représentation graphique des équations de la forme $y=a(x-k)^2+m$?
[où k , m et a sont des constantes réelles quelconques; x et y des variables réelles]

7. Représentation d'une équation du deuxième degré sous forme développée:

a. Quel algorithme permet de représenter graphiquement de façon efficace une équation du deuxième degré donnée sous forme développée?

b. L'appliquer aux équations $y=-2x^2-6x+8$, $y=4x^2+23x+9$ et $y=x^2+3x+4$

Activité 11 Géométrie cartésienne?

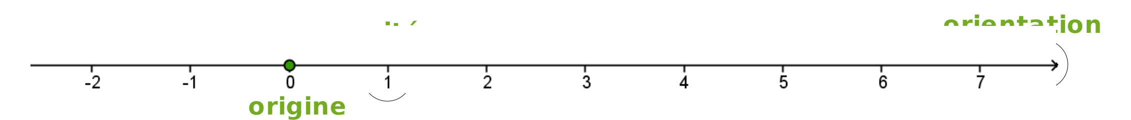
Pourquoi appelle-t-on parfois la géométrie analytique « géométrie cartésienne »?

A savoir 1 Le repère orthonormé dans le plan

Deux mathématiciens français, René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665) vont, avec d'autres, établir un lien entre le calcul algébrique et les objets géométriques, c'est la géométrie analytique, aussi appelée géométrie cartésienne en l'honneur de Descartes.

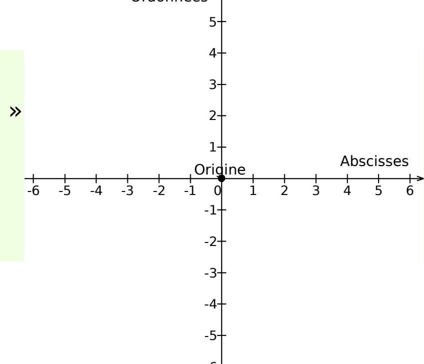
Définitions

Un **axe** est une droite munie d'un point appelé **origine**, d'une **orientation** et d'une **unité**.



Un **repère** est composé de deux axes dont les origines sont l'unique point d'intersection, qu'on appelle également **origine** du repère.
Si les deux axes ont la même unité, on parle de **repère normé**.
Si les deux axes sont perpendiculaires, on parle de **repère orthogonal**.
Si les deux axes ont la même unité et sont perpendiculaires, on parle de **repère orthonormé**. Dans ce cas, on le représente avec un axe horizontal, appelé **axe des abscisses** (ou axe **Ox**), et un axe vertical, appelé **axe des ordonnées** (ou axe **Oy**).

Illustration :



- Par abus de langage, on parle souvent de « l'axe des x » pour parler de l'axe des abscisses et de « l'axe des y » pour celui des ordonnées.
- Le plan cartésien est divisé en quatre quadrants numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

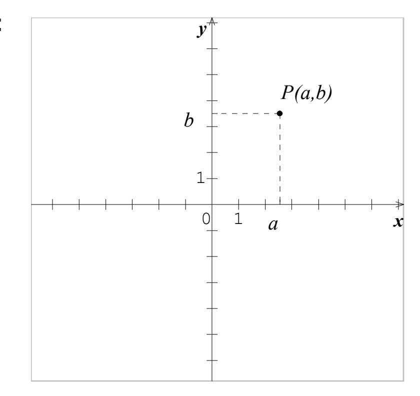
Définition

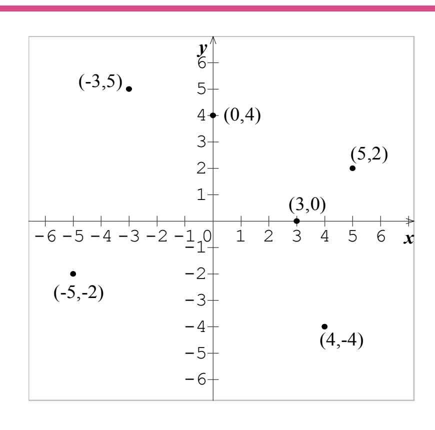
Soit P un point quelconque du plan:

- la droite verticale passant par P coupe l'axe Ox en un point unique ; soit a la coordonnée de ce point sur l'axe Ox (a est appelé l'**abscisse de *P***);
- la droite horizontale passant par P coupe l'axe Oy en un point unique ; soit b la coordonnée de ce point sur l'axe Oy (b est appelé l'**ordonnée de *P***).

Ainsi, à tout point P du plan peut être associé un couple unique de nombres (a ; b). On dit que a et b sont les coordonnées du point P et on parle du point (a ; b) ou du point $P(a ; b)$.
Inversement, tout couple (a ; b) détermine un unique point P de coordonnées a et b.

Illustration :





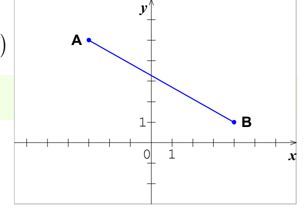
A savoir 2 Distance entre deux points

Théorème

Soient $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ deux points du plan.
Alors la distance d entre P_1 et P_2 est : $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Exemple : Déterminer la distance entre les points $A(-3;5)$ et $B(4;1)$

$d(A,B)=\sqrt{(4-(-3))^2+(1-5)^2}=\sqrt{65}\approx 8.06$



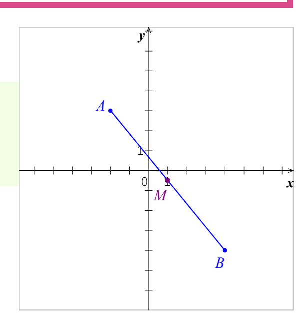
A savoir 3 Milieu entre deux points

Théorème

Soient $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ deux points du plan.
Alors le point M situé entre les deux points P_1 et P_2 est : $M(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2})$.

Exemple :

Déterminer les coordonnées du point milieu entre $A(-2;3)$ et $B(4;-4)$. $M_{(A,B)}=(\frac{-2+4}{2};\frac{3+(-4)}{2})=(1;-\frac{1}{2})$.



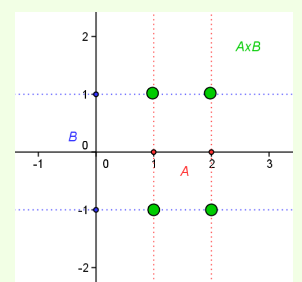
A savoir 4 Le produit cartésien

Définition

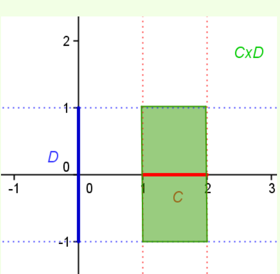
Soient A et B deux ensembles de nombres réels. Le **produit cartésien** de A par B , noté AxB , est l'ensemble de tous les couples dont la première coordonnée appartient à A et la deuxième coordonnée appartient à B .

Exemples

□ Soient $A=\{1;2\}$ et $B=\{-1;1\}$, alors le produit cartésien de A par B est définit par : $AxB=\{(1;-1);(1;1);(2;-1);(2;1)\}$.



□ Soient $C=[1;2]$ et $D=[-1;1]$, alors le produit cartésien de C par D se représente par le rectangle suivant



□ L'ensemble des points du plan est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x;y)|\,x,y\in\mathbb{R}\}$.

□ $(2;4)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(\pi;0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, attention : $(\pi;0)\neq(0;\pi)$.

Remarque

$\mathbb{R}_+ x \mathbb{R}_+$ est le **premier quadrant.**

$\mathbb{R}_- x \mathbb{R}_+$ est le **deuxième quadrant.**

$\mathbb{R}_- x \mathbb{R}_-$ est le **troisième quadrant.**

$\mathbb{R}_+ x \mathbb{R}_-$ est le **quatrième quadrant.**

Remarque: ne pas confondre le couple (2;3) qui représente un point du plan et l'ensemble {2;3} qui contient les deux nombres 2 et 3.

A savoir 5 Représentation graphique d'une équation

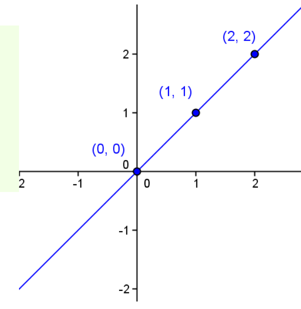
Relation entre l'algèbre et la géométrie

On considère une équation (*E*) à deux inconnues, x et y. Soit S l'ensemble de tous les couples de nombres $(a;b)$ qui vérifient cette équation (c'est-à-dire que S est l'ensemble des solution de (*E*)). Si on représente dans un repère tous les points de S, on obtient une **représentation graphique de l'équation** (*E*).

Tout point dont les coordonnées sont solution de l'équation appartient à la représentation graphique de l'équation; réciproquement, tout point qui appartient à la représentation graphique est solution de l'équation.

Exemple

Prenons l'équation à 2 inconnues $x=y$. Les couples $(0;0);(1;1);(2;2)$, entre autres, vérifient cette équation. Pour représenter l'ensemble des solutions de cette équation, il faut placer tous les points dont la seconde coordonnée est égale à la première.



Graphique de $x=y$

A savoir 6 René Descartes

René Descartes, né le 31 mars 1596 à La Haye en Touraine (localité rebaptisée Descartes par la suite) et mort à Stockholm dans le palais royal de Suède le 11 février 1650, est un mathématicien, physicien et philosophe français. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne. En physique, il est considéré comme le fondateur du mécanisme, et en mathématiques, de la géométrie analytique. Sa méthode philosophique et scientifique (...) se caractérise par sa simplicité (Descartes la résume en peu de règles, quatre en tout dans le Discours de la méthode) et (...) prend pour modèle la méthode mathématique. L'influence de Descartes sera déterminante sur tout son siècle : les grands philosophes qui lui succèderont développeront leur propre philosophie par rapport à la sienne, soit en opposition (Hobbes, Pascal, Spinoza, Leibniz), soit en accord (Arnauld, Malebranche).



Source: http://fr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

A savoir 7 Les droites

Définition (pente entre deux points du plan)

Soient $P_1(x_1\,;y_1)$ et $P_2(x_2\,;y_2)$ deux points du plan non alignés verticalement. **La pente** p entre P_1 et P_2 est définie par $p=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Exemple: calculer la pente entre les points $P_1(2;-5)$ et $P_2(4;2)$

$p=\frac{(-5)-2}{2-4}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$; on peut également calculer ainsi: $p=\frac{2-(-5)}{4-2}=\frac{7}{2}$

Remarque

Si $P_1(x_1\,;y_1)$ et $P_2(x_2\,;y_2)$ sont alignés verticalement, c'est à dire si $x_1=x_2$, alors la pente entre P_1 et P_2 n'est pas définie.

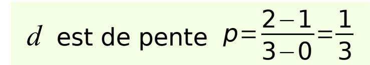
Définition (pente d'une droite du plan)

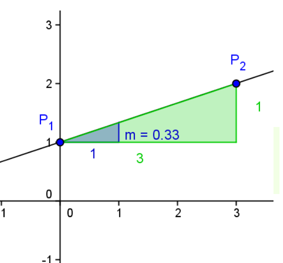
Soient d une droite non verticale du plan, $P_1(x_1\,;y_1)$ et $P_2(x_2\,;y_2)$ deux points quelconques de d . La **pente** p de d est définie par $p=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Remarques

- si d est verticale, c'est à dire si $x_1=x_2$ pour tout choix de P_1 et P_2 , alors la pente de d n'est pas définie;
- si d est horizontale, c'est à dire si $y_1=y_2$ pour tout choix de P_1 et P_2 , alors la pente de d est nulle;
- deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont la même pente.

Exemple: soit la droite d passant par les points $P_1(0;1)$ et $P_2(3;2)$


d est de pente $p=\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}$



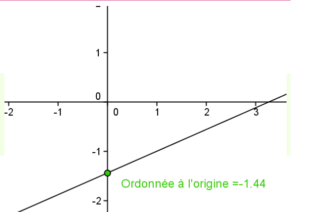
Remarque: c'est grâce au théorème de Thalès que cette définition à un sens!

Définition (ordonnée à l'origine d'une droite du plan)

On appelle **ordonnée à l'origine** d'une droite d la seconde coordonnée du point d'intersection entre d et Oy.

Exemple

Soit d la droite représentée ci-contre. Son ordonnée à l'origine est environ de $-1,44$.



Théorème (équation d'une droite verticale du plan)

Si d est une **droite verticale** du plan, alors son équation est de la forme $x=a$, avec x une variable réelle et a une constante réelle, c'est à dire $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si on considère l'équation (*E*): $x=a$ avec x une variable réelle et a une constante réelle, alors (*E*) est l'équation d'une droite verticale du plan.**Théorème (équation** d'une droite horizontale du plan)
Si d est une **droite horizontale** du plan, alors son équation est de la forme $y=b$, avec y une variable réelle et b une constante réelle ($y \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$).
Réciproquement, si on considère l'équation (*E*): $y=b$,avec y une variable réelle et b une constante réelle, alors (*E*) est l'équation d'une droite horizontale du plan.

Théorème (équation d'une droite oblique du plan)

Si d est une **droite oblique** du plan, alors son équation est de la forme $y=px+q$, où p est la **pente** de la droite et q l'**ordonnée à l'origine** de la droite. La variable y s'exprime à l'aide d'**une équation du premier degré en x**, on a $y=E(x)$.
Réciproquement, si on considère l'équation (*E*): $y=px+q$ avec x et y des variables réelles et p et q des constantes réelles, alors (*E*) est l'équation d'une droite oblique du plan.

Vocabulaire: cette équation s'appelle l'**équation réduite** de d ; cette écriture est unique.

Équation générale de la droite ax+by+c=0

Dans tous les cas de droites, on peut transformer l'équation de la droite en une équation équivalente de la forme $ax+by+c=0$, où x et y sont des variables réelles, et a,b et c des constantes réelles.

Vocabulaire: cette équation s'appelle une **équation cartésienne** de d .

Remarques

- si $a=0$ et $b=0$, l'équation $ax+by=c$ devient $c=0$. Elle est soit toujours vérifiée, soit jamais. Cette équation ne se représente pas comme une droite mais le plan entier ou un ensemble vide;
- si $a=0$ et $b\neq 0$, l'équation $ax+by=c$ devient $by=c \Leftrightarrow y=\frac{c}{b}$, ce qui se représente par une droite horizontale;
- si $a\neq 0$ et $b=0$, l'équation $ax+by=c$ devient $ax=c \Leftrightarrow x=\frac{c}{a}$, ce qui se représente par une droite verticale;
- lorsqu'on considère une équation réduite, par exemple $y=-2x+1$, on sait immédiatement que la pente de la droite est égale à -2 (et non à -2x !)

A savoir 8 Droites perpendiculaires

Théorème

Deux droites de pentes p_1 et p_2 sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $p_1 \cdot p_2=-1$

A savoir 9 Déterminer l'équation réduite ou cartésienne de *d*

Exemple 1: déterminer l'équation réduite et une équation cartésienne de la droite d de pente -3 passant par le point A(2;5)

L'équation réduite de d est de la forme $y=px+q$ où p est la pente et q l'ordonnée à l'origine. Comme la pente est donnée, on a donc $y=-3x+q$; reste à déterminer q.

Comme $A\in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de d, soit: $5=-3\cdot 2+q\Leftrightarrow 5=-6+q\Leftrightarrow q=11$. Conclusion: l'équation réduite de d est $y=-3x+11$.

On obtient une équation cartésienne ainsi: $y=-3x+11=0\Leftrightarrow 3x+y-11=0$

Exemple 2: déterminer l'équation réduite et une équation cartésienne de la droite d passant par les points A(2;5) et B(-4;1)

L'équation réduite de d est de la forme $y=px+q$ où p est la pente et q l'ordonnée à l'origine. On calcule la pente: $p=\frac{5-1}{2-(-4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et on a donc $y=\frac{2}{3}x+q$.

Reste à déterminer q; comme $A\in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de d, soit: $5=\frac{2}{3}\cdot 2+q\Leftrightarrow 5=\frac{4}{3}+q\Leftrightarrow q=5-\frac{4}{3}\Leftrightarrow q=\frac{11}{3}$.

Conclusion: l'équation réduite de d est $y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$.

On obtient une équation cartésienne ainsi: $y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}\Leftrightarrow 3y=2x+11\Leftrightarrow 2x-3y+11=0$

Exemple 3: déterminer l'équation réduite et une équation cartésienne de la droite d parallèle à la droite d' d'équation $2y+6y-1=0$ et passant par le point A(2;5)

L'équation réduite de d est de la forme $y=px+q$ où p est la pente et q l'ordonnée à l'origine. Comme d est parallèle à d', elles ont la même pente; déterminons celle de d':

$2x+6y-1=0\Leftrightarrow 6y=-2x+1\Leftrightarrow y=\frac{-2}{6}x+\frac{1}{6}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$, d'où pente de d' = $\frac{1}{3}$ on a donc $d:y=\frac{1}{3}x+q$; reste à déterminer q.

Comme $A\in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de d, soit: $5=\frac{1}{3}\cdot 2+q\Leftrightarrow 5=\frac{2}{3}+q\Leftrightarrow q=5-\frac{2}{3}\Leftrightarrow q=\frac{13}{3}$. Conclusion: l'équation réduite de d est $y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$

On obtient une équation cartésienne ainsi: $y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}\Leftrightarrow 3y=x+13\Leftrightarrow x-3y+13=0$

Exemple 4: déterminer l'équation réduite de la droite d perpendiculaire à la droite d' d'équation $2y+6y-1=0$ et passant par le point A(2;5)

L'équation réduite de d est de la forme $y=px+q$ où p est la pente et q l'ordonnée à l'origine. Comme d est perpendiculaire à d', elles ont des pentes inverses et opposées; déterminons celle de d': $2x+6y-1=0\Leftrightarrow 6y=-2x+1\Leftrightarrow y=\frac{-2}{6}x+\frac{1}{6}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$, d'où pente de d' = $\frac{1}{3}$ et donc pente de d = -3 , soit $d:y=-3x+q$; reste à déterminer q.

Comme $A\in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de d, soit: $5=-3\cdot 2+q\Leftrightarrow q=11$. Conclusion: l'équation réduite de d est $d:y=-3x+11$

A savoir 10 Les cercles

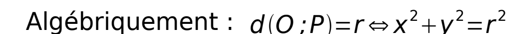
Cercle centré à l'origine

Le cercle « le plus simple » est celui de rayon r, centré à l'origine :

Question : Qu'est-ce qui caractérise un point P qui appartient au cercle c ?

Réponse : $P \in c \Leftrightarrow d(O;P)=r$

« Dire qu'un point appartient à c est équivalent à dire que la distance entre ce point et l'origine vaut r ».



Algébriquement : $d(O;P)=r \Leftrightarrow x^2+y^2=r^2$

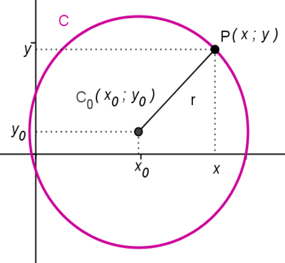
L'équation du cercle c centré à l'origine et de rayon r est donc : $x^2+y^2=r^2$.
Si un point $P(x;y)$ du plan appartient au cercle c, alors ses coordonnées x et y vérifient l'équation $x^2+y^2=r^2$. Réciproquement, si les coordonnées x et y d'un point $P(x;y)$ du plan vérifient l'équation $x^2+y^2=r^2$, alors P appartient à c.



Cercles quelconques

De la même manière, on peut montrer que l'équation du cercle c de centre $C_0(x_0;y_0)$ et de rayon r est donc : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Remarque: en développant cette équation, on a une autre forme pour exprimer l'équation d'un cercle : $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.



Exemple: déterminer l'équation du cercle c de centre C(2;-3) passant par le point A(2;5)

L'équation de c est de la forme $c:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Comme on connaît le centre C(2;-3), on a: $c:(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$; reste à déterminer r.

Comme $A \in c$, on sait que r est la distance entre C et A; $r=\sqrt{(2-2)^2+(-3-5)^2}=8$

Donc: $c:(x-2)^2+(y+3)^2=8^2$

Exemple: déterminer si l'équation $x^2+y^2-2x+8y+15=0$ est celle d'un cercle c

Il faut essayer de transformer l'équation $x^2+y^2-2x+8y+15=0$ pour l'écrire sous la forme $c:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$:

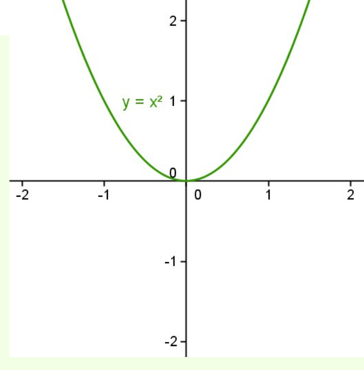
$$x^2+y^2-2x+8y+15=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+...)+(y^2+8y+...)+15=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2+15=1+16 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=2$$

Donc l'équation est celle du cercle de centre $C(1;-4)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$

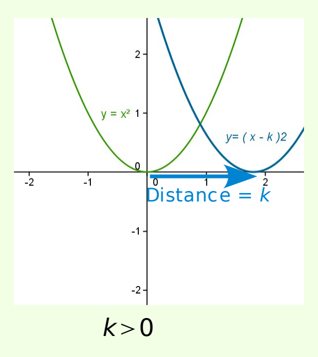
A savoir 11 Les paraboles

Nous allons maintenant nous intéresser aux équations du type $y=E(x)$, où $E(x)$ est une expression du deuxième degré à une variable x, c'est-à-dire aux équations du type $y=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

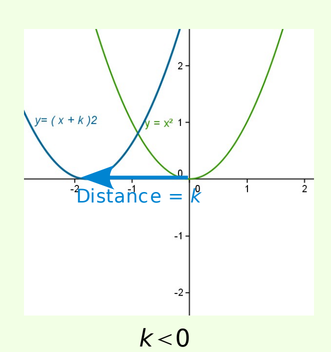
L'équation du deuxième degré « la plus simple » est $y=x^2$ qui se représente par la courbe ci-contre:



L'équation $y=(x-k)^2$ correspond à la même courbe qu'on a déplacée vers la droite horizontalement d'une distance k. Attention au signe de k.

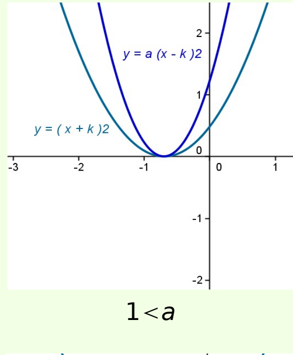


$k>0$

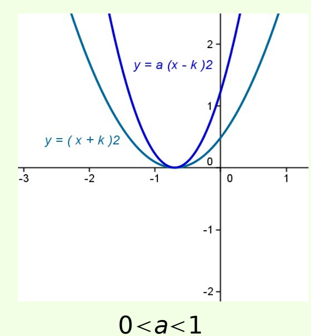


$k<0$

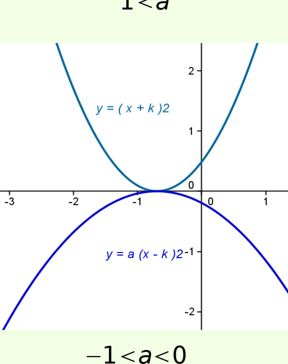
L'équation $y=a\cdot(x-k)^2$ correspond à la courbe qu'on a déplacée horizontalement d'une distance k, puis qu'on resserre ou qu'on élargit autour de l'axe vertical $x=k$ en fonction de la valeur de a.



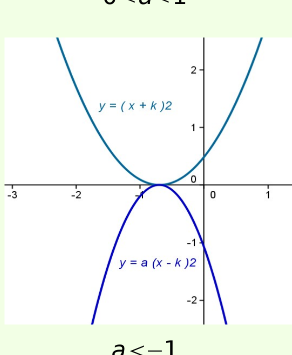
$1<a$



$0<a<1$

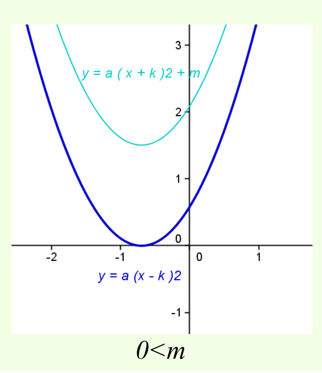


$-1<a<0$

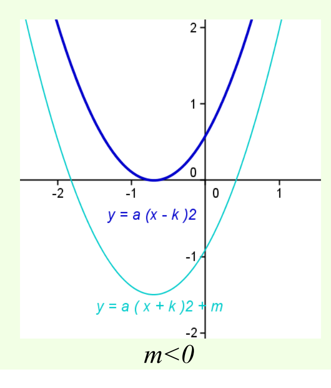


$a<-1$

L'équation $y=a\cdot(x-k)^2+m$ correspond à la courbe qu'on a déplacée horizontalement d'une distance k, puis qu'on resserre ou qu'on élargit autour de l'axe vertical $x=k$ en fonction de la valeur de a, enfin on la déplace verticalement d'une distance m. Attention au signe de m.



$0<m$



$m<0$

Définition

Une représentation graphique d'une équation du type $y=a(x-k)^2+m$ s'appelle une **parabole**.

Théorème

Si une équation est de la forme $y=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$), alors on peut aussi écrire : $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta=b^2-4ac$.

Théorème

Si une équation est de la forme $y=ax^2+bx+c$, alors

- ☐ sa représentation graphique est une parabole,
- ☐ elle admet un axe de symétrie $x=-\frac{b}{2a}$,
- ☐ elle admet un sommet au point $S(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$,
- ☐ elle est convexe (c'est à dire de forme $\cup$) si $a>0$ et concave (c'est à dire de forme $\cap$) si $a<0$.

L'équation d'une parabole peut s'écrire sous différentes formes :

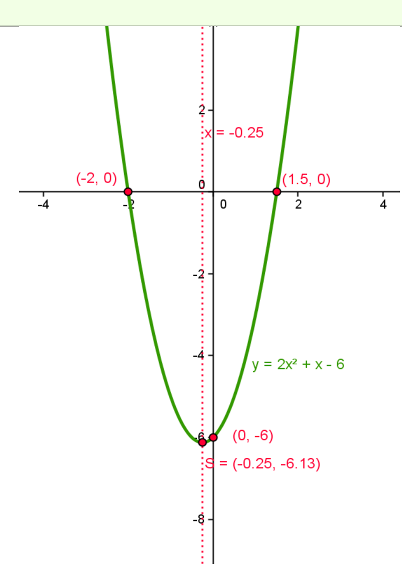
☐ $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$ s'appelle la **forme standard**. Cette écriture est toujours possible; elle permet d'obtenir facilement le sommet $S(\frac{-b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$ de la parabole.

☐ $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ est la **forme factorisée**. Cette écriture n'existe que si $\Delta\geq 0$; elle permet d'obtenir facilement les intersections de la parabole avec l'axe Ox, à savoir les deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$ si $\Delta>0$ ou l'unique point $(x_0;0)$ si $\Delta=0$.

☐ $y=ax^2+bx+c$ s'appelle la **forme développée**. Cette écriture est toujours possible et elle permet d'obtenir facilement l'ordonnée à l'origine $(0;c)$.

Méthode générale pour représenter graphiquement une équation du type $y=ax^2+bx+c$

	illustration avec $y=2x^2+x-6$
On cherche l'intersection avec l'axe Oy en posant $x=0$ dans l'équation.	Si $x=0$, alors l'intersection avec Oy est : $y=2\cdot 0^2+0-6=-6$.
On cherche la(les) intersection(s) avec l'axe Ox en résolvant l'équation $y=0$.	Si $y=0$, il faut résoudre $2x^2+x-6=0$. On a $\Delta=49$ et on obtient $x=-2$ ou $x=\frac{3}{2}$
On identifie l'axe de symétrie $x=-\frac{b}{2a}$	Axe de symétrie : $x=-\frac{1}{4}$.
On identifie le sommet $(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$	Sommet : $(-\frac{1}{4};-\frac{49}{8})$.
Si c'est possible, on obtient un point supplémentaire du graphe par symétrie du point intersection avec l'axe 0y.	Si $x=0$, alors le symétrique par rapport à l'axe de symétrie est $x=-\frac{1}{2}$ .Donc le point $(-\frac{1}{2};-6)$ appartient aussi à la représentation graphique.
On identifie en fonction de a si on est dans un cas de parabole convexe ou concave.	$a=2$, donc $a>0$, donc parabole convexe (c'est à dire $A\cup B$).
Si nécessaire, on détermine encore une solution supplémentaire de l'équation ainsi que son symétrique par rapport à l'axe $x=-\frac{b}{2a}$.	Prenons $x=2$ alors $y=2\cdot 2^2+2-6=4$ donc le point $(2;4)$ appartient à la parabole. Par symétrie, le point $(-2.5;4)$ appartient également à la parabole.
Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole.	



Repère orthonormé

1 Représenter dans un repère du plan tous les points dont :

a. les deux coordonnées sont des entiers strictement compris entre -3 et 2.

b. les deux coordonnées sont des réels compris entre -3 et 2.

c. la première coordonnée est 2.

d. la première coordonnée est inférieure ou égale à 2.

e. le produit des coordonnées est nul.

f. le produit des coordonnées est supérieur ou égal à 0.

g. la somme des coordonnées est nulle

h. la somme des coordonnées est inférieure ou égale à 0.

2 Représenter dans un repère du plan les ensembles de couples suivants :

a. $[-1;3]x[0;2]$ **c.** $\mathbb{R}x[1;2]$

b. $[-1;3]x\{0;2\}$ **d.** $\{1;2\}x\mathbb{R}$

e. $[-5;3]x\{-1;0;2\}$

f. $]-\infty;1]x]2;+\infty[$

g. $([-3;0]\cup[1;2])x([-2;0]\cup[2;3])$

h. $(\mathbb{R}\backslash]0;2[)x(\mathbb{R}\backslash]-1;1[)$

3 Écrire {(1;a);(1;b);(1;c)} sous forme de produit cartésien.

4 Écrire les ensembles définis dans l'exercice 1 sous forme de produit cartésien (quand c'est possible).

5 Trouver les coordonnées des projections sur l'axe des abscisses et des ordonnées des points : $A(2;-3)$, $B(-5;1)$ et $C(-3;-4)$.

6 Trouver les coordonnées des points symétriques aux points $A(2;-3)$, $B(-5;1)$ et $C(-3;-4)$ par rapport à l'axe *Ox* et à l'axe *Oy*.

7 Trouver les coordonnées du point symétrique au point : $A(2;-3)$, par rapport à l'origine du repère.

8 Déterminer dans quel(s) quart(s) de plan se trouve le point $P(a;b)$, si :

a. $a=2$ **b.** $b<0$ **c.** $ab>0$

d. $a-b=0$ **e.** $a-b>0$ **f.** $b=-4$

9 Calculer la distance entre les points A(3;8) et B(-2;-1).

10 Déterminer le milieu du segment [AB] avec A(3;8) et B(-2;-1).

11 Soient $A(8;5)$, $B(1;-2)$ et $C(-3;2)$. Montrer que le triangle *ABC* est rectangle et calculer son aire.

12 $A(-3;8)$ étant donné, calculer les coordonnées du point *B* tel que $M(5;-10)$ soit le milieu du segment [*AB*].

13 Dans les cas suivants, *C* est-il sur la médiatrice du segment [*AB*]?

a. $A(-4,-3)$, $B(6;1)$ et $C(5;-11)$.

b. $A(-3;2)$, $B(-1;13)$ et $C(7;7)$.

14 Établir une formule qui exprime que $P(a;b)$ est à une distance 5 de l'origine. Décrire l'ensemble de ces points.

15 Déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui sont à une distance 6 de $P(5;3)$.

16 Déterminer tous les points de l'axe des abscisses qui sont à une distance 5 de $P(-2;4)$.

17 Déterminer le point du troisième quadrant de coordonnées $(2a;a)$ qui est à une distance 6 de $P(1;3)$.

18 Quels sont les points $P(x;y)$ du plan tels que $d(OP)=4$ et $y=-2$?

19 Soit le triangle défini par les points $A(0;0)$, $B(2;3)$ *et* $C(-1;5)$. Calculer les coordonnées des points milieux de ses côtés.

Représentation d'équations

20 Prendre position à propos des conjectures suivantes.

a. Conjecture 1 : Si (*E*) est l'équation $2x+3y=0$, alors (1;-3) est solution de (*E*)

b. Conjecture 2 : Si (*E*) est l'équation $2x^2-3y=11$, alors (1;-3) est solution de (*E*)

c. Conjecture 3 : Si (*E*) est l'équation $2x-3y=1$, alors (2;1) est l'ensemble des solutions de (*E*).

d. Conjecture 4 : Si (E) est l'équation $2x-3y=1$, alors une représentation graphique est une droite passant par l'origine.

e. Conjecture 5 : Si on considère tous les points situés sur un cercle centré en l'origine et de rayon 4, alors son équation est $x^2-y^2=4$.

21 Déterminer les équations des lieux géométriques suivants :

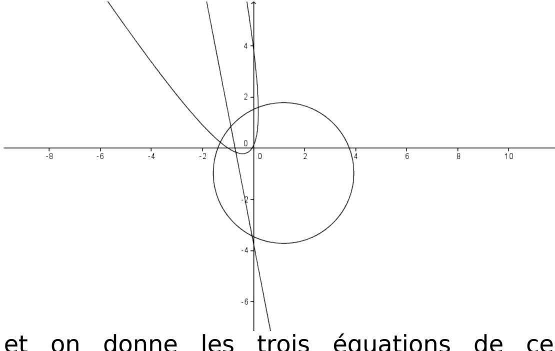
a. L'ensemble des points situés à égale distance des points A(-1;5) et B(3;5)

b. L'ensemble des points situés sur une parallèle à l'axe Oy passant par le point P(2;3)

c. L'ensemble des points situés sur une parallèle à l'axe Ox passant par le point P(0;2)

22 On considère la représentation graphique suivante, qui comprend trois graphiques :

a. une droite **b.** un cercle **c.** une courbe



et on donne les trois équations de ces graphiques :

a. $(x-1.18)^2+(y+0.98)^2=7.56$

b. $2.3x+0.45y+1.65=0$

c. $2.1x^2+1.8xy+0.3y^2+2.2x-1.2y+0.12=0$

Regrouper les équations avec leurs représentations graphiques en justifiant la réponse.

23 Pourquoi $x^2+y=1$ ne peut pas être représentée graphiquement par une droite?

24 Parmi les équations suivantes, trouver celles dont le graphique passe par l'origine:

a. $x+y=0$ **b.** $x^2+y^2=36$

c. $x^2+y^2+4x-6y-1=0$

25 Trouver les points d'intersection avec les axes Ox et Oy pour les graphiques des équations suivantes:

a. $x^2+y^2=49$ **b.** $(x+6)^2+(y-3)^2=25$

c. $x^2+y^2-12x+16y=0$

d. $x^2+y^2-6x+4y+12=0$

Les droites

26 Sur un même repère, tracer les droites passant par le point $P(-2;3)$ et de pente :

a. $m=1$ **c.** $m=-3$ **e.** $m=0$

b. $m=\frac{1}{2}$ **d.** $m=-\frac{3}{5}$ **f.** $m=\frac{7}{3}$

27 Les points suivants sont-ils alignés ?

a. $P(-1;-2), Q(5;-5)$ et $R(-15;6)$

b. $P(2;4), Q(-3;2)$ et $R(-13;-2)$

c. $P(\pi;\sqrt{5}), Q(\pi-4;3+\sqrt{5})$ et $R(8-\pi;-6+\sqrt{5})$

28 Quel est l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe Ox de la droite passant par les points :

a. $A(-1;3)$ et $B(4;6)$ **b.** $A(-2;6)$ et $B(4;0)$

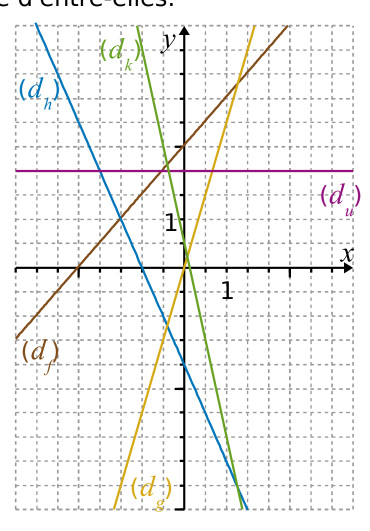
29 Dessiner la droite passant par A et B et calculer sa pente:

a. $A(-3;2)$ et $B(5;-4)$

b. $A(2;5)$ et $B(-7;5)$

c. $A(-3;2)$ et $B(-3;5)$

30 On considère les droites suivantes; Déterminer une équation cartésienne de chacune d'entre-elles:



Exercices d'entraînement

31 Donner la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

a. $x+2y-3=0$ **c.** $x+y+3=0$

b. $-2x+y-4=0$

32 Déterminer l'équation de la droite passant par $A(-3;2)$ et $B(-3;-2)$

33 Donner l'équation cartésienne de :

a. la droite qui est de pente -1 et dont l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{5}{8}$.

b. la droite qui passe par le point (4 ; 4) et dont l'ordonnée à l'origine vaut 8.

c. la droite qui passe par le point (1 ; 2) et de pente $-\frac{1}{2}$.

d. la droite qui passe par les points (1 ; 2) et (5 ; 9).

34 Donner l'équation cartésienne de :

a. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui est parallèle à la droite d' d'équation $y=9x-1$.

b. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui est perpendiculaire à la droite d' d'équation $y=9x-1$.

c. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui intersecte la droite d' d'équation $y-5x=1$ sur l'axe des ordonnées.

d. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui intersecte la droite d' d'équation $y-5x=1$ en (-1 ; -4).

35 Les points $P(1;1)$, $Q(3;2)$et $R(0;8)$ sont-ils les sommets d'un triangle rectangle ?

36 Les points $P(5;4)$, $Q(-3;-5)$ et $R(-8;-1)$ sont-ils les sommets d'un triangle rectangle ?

37 Établir une équation de la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(-4;-3)$ et $B(6;1)$.

Cercles

38 Soit c un cercle d'équation $(x-3)^2+(y+2)^2=36$.

a. Donner le centre et le rayon de c.

b. Est-ce que $A(7;-5)$ appartient à c ?

c. Donner 4 points de c.

39 Déterminer l'équation du cercle c :

a. de centre $C_0=(4;-2)$ et de rayon $r=8$.

b. de centre $C_0=(-4;-2)$ et passant par le point $P=(1;3)$.

40 Déterminer l'équation du cercle c :

a. tangent à l'axe Ox et de centre $(3;2)$.

b. tangent à la droite d : $y=5$ et de centre $(5;-2)$.

c. de centre $(1;-1)$ et passant par $(3;2)$.

41 Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles suivants :

a. $x^2+y^2+6x+8y+24=0$

b. $x^2+y^2-4x+2y+6=0$

c. $x^2+y^2-20y+36=0$

d. $x^2+y^2-x+3y-1=0$

42 Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles suivants :

a. c : $x^2+y^2-25=0$

b. c : $x^2+y^2+36=0$

c. c : $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

d. c : $x^2+y^2+10y+9=0$

e. c : $x^2+y^2-8x-6y=0$

f. c : $x^2+y^2+4x-2y+9=0$

g. c : $2x^2+2y^2-2x+10y+11=0$

h. c : $225x^2+225y^2+600x-990y+1089=0$

Paraboles

43 Représenter graphiquement les équations suivantes :

a. $y=x^2-3x+2$ **e.** $2y=-x^2-2x+3$

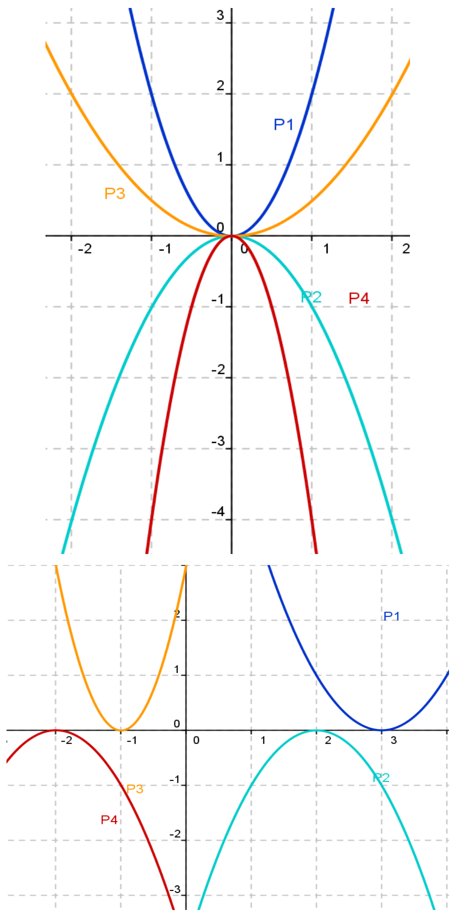
b. $y=-x^2+2x+3$ **f.** $3x^2+16y=0$

c. $y=(x+2)^2$ **g.** $y=2x^2-8x-10$

d. $y=-x^2+x+4$ **h.** $y=3(x-4)^2+1$

44 On considère les graphes des fonctions du deuxième degré suivants. Déterminer l'expression algébrique de chacune des

fonctions représentées ci-dessous :



45 On considère les graphes des fonctions du deuxième degré suivants. Déterminer l'expression algébrique de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

46 Pour chacune des équations du deuxième degré suivantes, donner le ou les intersections avec Ox, l'ordonnée à l'origine et tracer le graphe de la fonction.

a. $y=x^2+x+1$

b. $y=-x^2+x+1$

c. $y=2x^2+3x+4$

d. $y=3x^2-6x+3$

e. $y=-2x^2-1$

f. $y=x^2+c$ ($c\in\mathbb{R}$)

47 Déterminer pour les équations de l'exercice précédent :

- le sommet,
- l'axe de symétrie,
- la forme standard,
- la forme développée.

48 Pour quelle valeur de x l'expression $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2$ est-elle minimale, et que vaut alors cette expression ?

Interpréter graphiquement.

49 A partir d'un pont situé à 20m au dessus d'une rivière, une pierre est jetée vers le haut avec une vitesse initiale de 10[m/s]. A partir de ce moment, la hauteur du projectile par rapport à la rivière [en mètres] au temps t [en secondes] est donnée par la formule

$h(t)=20+10t-\frac{1}{2}gt^2$, où $g\simeq 10m/s^2$

a. A quel moment la pierre atteint-elle sa hauteur maximale?

b. Quelle est cette hauteur maximale?

c. Combien de temps après son lancer la pierre retombe-t-elle dans l'eau?

d. Interpréter graphiquement.

50 Une agence de voyage organise une excursion. Le prix du billet a été fixé à 60.-, mais la compagnie a consenti, dans le cas où plus de 100 personnes feraient le voyage, à baisser le prix de chaque billet de 25 cts par personne additionnelle.

Sachant qu'il en coûte 1000.- à l'agence pour transporter les 100 premiers passagers et 15.- par passager additionnel, trouver le nombre de passagers pour lequel le bénéfice net de la compagnie est maximal.

Interpréter graphiquement.

Exercices supplémentaires

51 Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle et calculer son aire.

a. $A=(8;5)$, $B=(1;-2)$, $C=(-3;2)$

b. $A=(-6;3)$, $B=(3;-5)$, $C=(1;5)$

52 Représenter graphiquement les équations suivantes et déterminer les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

a. $y=\sqrt{x}$

b. $y=x^3+1$

c. $y=|x-1|$

d. $x=-2y^2$

53 Que vaut la pente de la droite passant par :

a. $(-5;3)$ et $(5;6)$

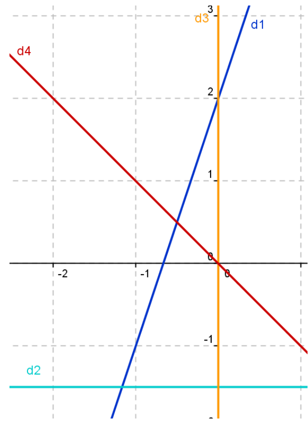
b. $(-3;1)$ et $(-5;5)$

c. $(0;0)$ et $(a;b)$ $(a\neq 0)$

d. $(a;0)$ et $(0;b)$ $(a\neq 0)$

54 On considère les droites suivantes.

Déterminer l'équation cartésienne de chacune d'entre-elles.



55 Les points suivants sont-ils alignés ?

a. $P(-1;-2)$, $Q(5;-5)$ et $R(-15;6)$

b. $P(2;4)$, $Q(-3;2)$ et $R(-13;-2)$

56 Quel est l'angle d'inclinaison par rapport à Ox de la droite passant par les points

a. $A(-1;3)$ et $B(4;6)$

b. $A(-2;6)$ et $B(4;0)$

57 Donner une équation de la droite passant par $(5;-3)$ et de pente -0.25.

58 Donner une équation de la droite passant par les points donnés.

a. $(0;0)$ et $(-1;3)$

b. $(3;1)$ et $(3;-4)$

c. $(1;2)$ et $(-3;2)$

d. $(\frac{5}{4};\frac{1}{2})$ et $(-\frac{3}{4};-\frac{7}{2})$

e. $(1-\sqrt{3};3)$ et $(1+\sqrt{3};5)$

59 Quelle est l'équation de la droite qui passe par $A=(2;-4)$ et qui est perpendiculaire à la droite $2x-5y-8=0$?

60 Donner l'équation du cercle de centre $C_0=(3;-2)$ et tangent à la droite $y=5$.

61 Donner la forme développée d'une équation du cercle centré au point C et de rayon r. Calculer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles avec les axes.

a. $C_0(0;0)$ et $r=7$

b. $C_0(-3;0)$ et $r=\sqrt{3}$

c. $C_0(2;-2)$ et $r=2$

d. $C_0(a;2a)$ et $r=\sqrt{5}a$

62 Déterminer (si possible) le centre et la rayon du cercle donné par l'équation :

a. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$

b. $x^2+y^2+8x-10y+37=0$

c. $x^2+y^2+4y-117=0$

d. $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

63 Déterminer les intersections des paraboles suivantes avec les axes.

a. $y=x^2-4x$

b. $y=-x^2-6x+1$

c. $y=6x^2+7x-24$

64 Exprimer les équations de paraboles suivantes sous la forme standard et, si possible) sous la forme factorisée.

a. $y=-x^2-4x-8$

b. $y=x^2-6x+11$

c. $y=2x^2-12x+22$

65 Le nombre M de km que peut parcourir une voiture avec 4l d'essence, en roulant à une vitesse $v\ km/h$ est donnée par la formule $M=-\frac{1}{48}v^2+\frac{5}{2}v$.

a. Déterminer la vitesse la plus économique pour un trajet.

b. Déterminer la plus grande valeur de M.

c. Interpréter graphiquement.

Réponses des exercices supplémentaires

51

a. $\overline{AB}=\sqrt{98}$; $\overline{BC}=\sqrt{32}$; $\overline{AC}=\sqrt{130}$

Par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ΔABC est rectangle en B.

Aire = $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}$ = 28

b. $\overline{AB}=\sqrt{145}$; $\overline{BC}=\sqrt{104}$; $\overline{AC}=\sqrt{53}$

Par Pythagore, ce trianglen'est pas rectangle.

52

a. Intersection avec 0x et 0y: (0;0)

b. intersection avec 0x: (1;0) , avec 0y: (0;1)

c. intersection avec 0x: (-1;0) , avec 0y: (0;1)

d. intersection avec 0xet 0y: (0;0)

53

a. $m=\frac{3}{10}$ **b.** $m=-2$ **c.** $m=\frac{b}{a}$ **d.** $m=-\frac{b}{a}$

54 d1 : $y=3x+2$ d3 : $x=0$

d2 : $y=-\frac{3}{2}$ d4 : $y=-x$

55 Si P, Q, R sont alignés, alors $\text{pente}_{P,Q}$ = $\text{pente}_{Q,R}$.

a. $\text{pente}_{P,Q} = -\frac{1}{2}$; $\text{pente}_{Q,R} = -\frac{11}{20}$

$\text{pente}_{P,Q} \neq \text{pente}_{Q,R}$ donc P, Q, R ne sont pas alignés.

b. $\text{pente}_{P,Q} = \text{pente}_{Q,R} = \frac{2}{5}$ donc P, Q, R sont alignés.

56

a. $\alpha \approx 31°$ **b.** $\alpha = 45°$

57 forme générale de l'équation réduite d'une droite : $y=mx+n$

$m=-0.25$ donc $y=-0.25x+n$

La droite passe par (5;-3) donc n doit satisfaire $-3=-0.25\cdot 5+n$ d'où $n=-1.75$.

Finalement : $y=-0.25x-1.75$.

58

a. $y=-3x$ **b.** $x=3$ **c.** $y=2$

d. $y=2x-2$ **e.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+4-\frac{\sqrt{3}}{3}$

59 d1: $2x-5y-8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{5}x+\frac{8}{5} \Rightarrow m_1=-\frac{2}{5}$

pente de la droite d2 perpendiculaire à d1 :

$m_2=\frac{-1}{m_1}=\frac{-1}{-\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$

d2: $y=\frac{5}{2}x+n$

d2 passe par (2;-4) : $-4=\frac{5}{2}\cdot 2+n \Rightarrow n=-9$

Finalement d2 : $y=\frac{5}{2}x-9$

60 Rép: $(x-3)^2+(y+2)^2=7^2$

61

a. $x^2+y^2=7^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-49=0$

intersection avec 0x : (-7;0) et (7;0)

intersection avec 0y : (0;-7) et (0;7)

b. $(x+3)^2+y^2=3 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x+6=0$

intersection ac 0x : ($-3-\sqrt{3}$;0) et ($-3+\sqrt{3}$;0)

intersection avec 0y : -

c. $(x-2)^2+(y+2)^2=2^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+4y+4=0$

intersection avec 0x : (2;0)

intersection avec 0y : (0;-2)

d. $(x-a)^2+(y-2a)^2=5a^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-4ay=0$

int avec 0x : ($(1+\sqrt{5})a$;0) et ($(1-\sqrt{5})a$;0)

int avec 0y : (0; $(2+\sqrt{5})a$) et (0; $(2-\sqrt{5})a$)

62

a. $C_0(2;-3)$ et r = 7 **c.** $C_0(0;-2)$ et r = 11

b. $C_0(-4;5)$ et r = 2 **d.** $C_0(-2;1)$ et r = 0

63

a. intersection avec 0x : (0;0) et (4;0)

intersection avec 0y : (0;0)

b. int avec 0x : ($-3-\sqrt{10}$;0) et ($-3+\sqrt{10}$;0)

intersection avec 0y : (0;1)

c. int avec 0x : ($-\frac{8}{3}$;0) et ($\frac{3}{2}$;0)

intersection avec 0y : (0;-24)

64

a. $y=-(x+2)^2-4$ (pas de forme factorisée)

b. $y=(x-3)^2+2$ (pas de forme factorisée)

c. $y=2(x-3)^2+4$ (pas de forme factorisée)

65 $M=-\frac{1}{48}v^2+\frac{5}{2}v \Leftrightarrow$

$M=-\frac{1}{48}\cdot(v-60)^2+75 \Rightarrow$ sommet : (60;75)

a. abscisse du sommet : 60 km/h

b. ordonnée du sommet : 75 km

"La science a eu de merveilleuses applications, mais la science qui n'aurait en vue que les applications ne serait plus de la science, elle ne serait plus que de la cuisine."

Henri Poincaré (1854-1912)

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

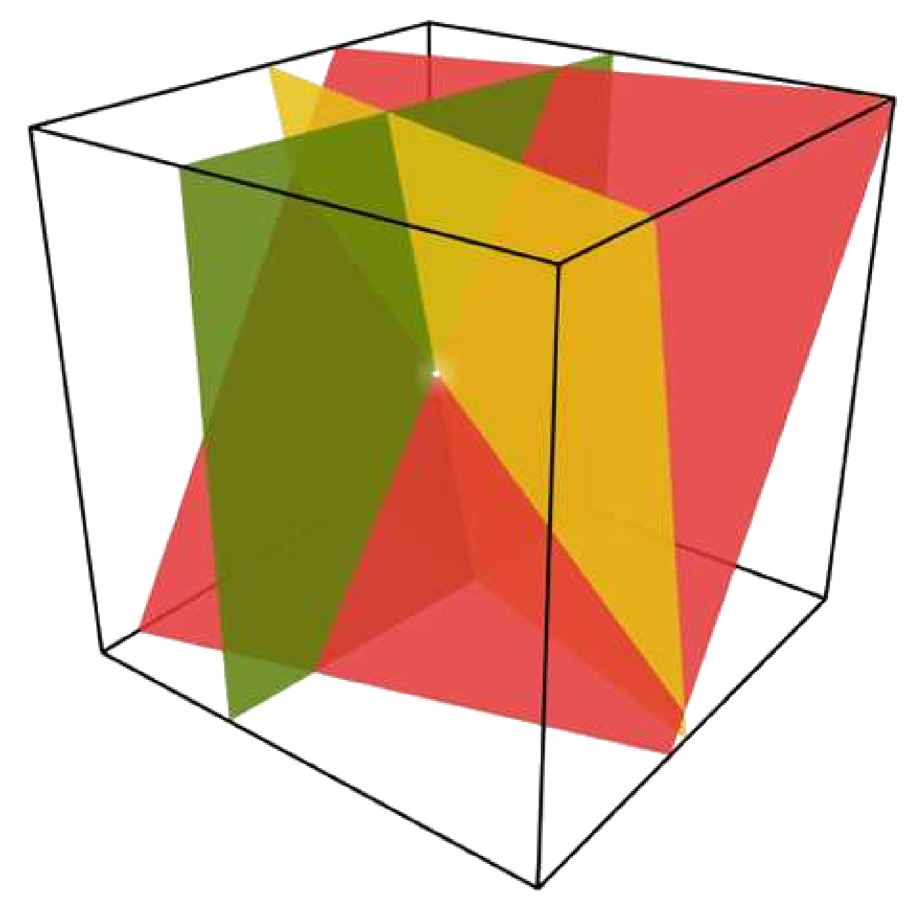
- ✔ Connaître le vocabulaire relatif au repère orthonormé et au repérage des points.
- ✔ Vocabulaire de géométrie cartésienne : origine, axes (abscisse et ordonnée), repère orthonormé, coordonnées, abscisse, quadrants
- ✔ Produit cartésien
- ✔ Expliquer comment on détermine la distance et le milieu entre deux points.
- ✔ Définir, exprimer et représenter graphiquement des produits cartésiens.
- ✔ Equations à deux inconnues, solutions
- ✔ Comprendre le lien entre géométrie (droites, cercles, ...) et algèbre (équations) via la correspondance entre les couples solutions d'une équation donnée en x et y et les points situés sur un objet géométrique
- ✔ Notion de pente d'une droite
- ✔ Comprendre et utiliser les équations de droites verticales et horizontales.
- ✔ Connaître les formes cartésienne et réduites des équations de droites, ainsi que l'influence des différents paramètres
- ✔ Connaître le vocabulaire et les propriétés relatifs aux droites : pente, ordonnée à l'origine, droites parallèles, droites perpendiculaires.
- ✔ Relation entre pentes de deux droites perpendiculaires
- ✔ Expliquer comment on déterminer l'équation d'un cercle de centre et de rayon donné.
- ✔ Connaître les trois formes de l'équation d'une parabole et les avantages de chacune.
- ✔ Connaître les formules relatives au sommet, à l'axe de symétrie et à l'intersection avec les axes d'un parabole.
- ✔ Comprendre les déplacements ou transformations dus au différents paramètres de l'équation standard de la parabole.
- ✔ Réinvestir les connaissances du chapitre 7 sur les équations du deuxième degré pour traiter les équations de paraboles.

Savoirs-faire

- ✔ Placer des points dans un repère et lire correctement les coordonnées d'un point donné.
- ✔ Savoir déterminer si un couple est solution ou pas d'une équation en x et y donnée
- ✔ Savoir représenter dans le plan tous les couples vérifiant une condition donnée (équation - inéquation simple)
- ✔ Savoir décrire par une équation ou une inéquation simple des lieux géométriques du plan
- ✔ Représenter un ensemble donné sous forme de produit cartésien
- ✔ Ecrire sous forme de produit cartésien un ensemble représenté graphiquement
- ✔ Calculer la distance entre deux points
- ✔ Calculer le milieu entre deux points
- ✔ Déterminer la pente entre deux points, la pente d'une droite
- ✔ Représenter le graphe d'une équation du type $ax-by+c\ \ 0$ ou $y = mx + n$

- ✔ Déterminer l'équation d'une droite vérifiant des conditions données
  - ✔ passant par deux points
  - ✔ passant par un point et parallèle à une droite d'équation donnée
  - ✔ passant par un point et perpendiculaire à une droite d'équation donnée
  - ✔ tangente à un cercle donné en un point donné
- ✔ Représenter un cercle à partir de son équation
- ✔ Déterminer l'équation d'un cercle donné
- ✔ Déterminer si une équation donnée est celle d'un cercle
- ✔ Déterminer l'équation d'une parabole donnée
  - ✔ à partir du sommet et d'un point
  - ✔ à partir des intersections avec l'axe Ox et d'un point
- ✔ Représenter une parabole à partir de son équation
- ✔ Résoudre et interpréter graphiquement des problèmes d'intersection
  - ✔ entre deux droites
  - ✔ entre deux paraboles
  - ✔ entre une droite et une parabole
  - ✔ entre un cercle et une droite verticale ou horizontale
  - ✔ * entre un cercle et une droite oblique

Chapitre 13 - Systèmes d'équations



Intersection de trois plans dans l'espace

Problème

Et vous, quel est le problème mathématique intéressant que vous connaissez?

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 De manière approchée

Avec un graphique

1. On considère l'équation $6x+3y=10$ où x et y sont les deux inconnues et on cherche des valeurs de x et de y qui vérifient cette égalité.

2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $6x+3y=10$? En citer quelques unes puis tracer dans un repère une représentation graphique de cette équation.

3. Reprendre les questions 1. et 2. avec l'équation $2x-3y=4$ et représenter graphiquement dans le même repère que précédemment.

4. On s'intéresse maintenant aux couples $(x\,;y)$ qui sont solutions des deux équations simultanément. On dit d'un tel couple qu'il est **solution du système** de deux équations du premier degré à deux inconnues noté : $\begin{cases} 6x+3y=10 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$.

D'après le graphique, combien de solutions admet ce système et quelles sont-elles ?

5. Vérifier la réponse en remplaçant x et y par les valeurs trouvées en 4**.**

6. Vocabulaire: cette méthode de résolution s'appelle la **méthode graphique**.

Activité 2 Une méthode de résolution

On considère le système $\begin{cases} 3x-y=11 \\ x-5y=57 \end{cases}$.

1. Écrire dans les deux équations une inconnue en fonction de l'autre.

2. En déduire une équation à une seule inconnue et le résoudre.

3. Utiliser maintenant la valeur déterminée à la question précédente pour trouver la valeur de la deuxième inconnue dans le système.

4. Tester le couple de valeurs $(x\,;y)$ trouvé et conclure.

5. Vocabulaire: cette méthode de résolution s'appelle la **méthode par substitution**.

Activité 3 Une autre méthode!

On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y=-4 \\ -3x-7y=25 \end{cases}$.

1. Résoudre ce système en utilisant la méthode par substitution.

2. Hakim remarque qu'en additionnant les deux premiers membres des équations, on réussit à « éliminer les termes en x » dans le calcul:



a. Qu'obtient-on en additionnant les premiers membres de ces équations ?

b. Que vaut cette somme ?

c. En-déduire une équation d'inconnue y et la résoudre.

3. Hakim se dit maintenant que pour trouver x, il suffirait de pouvoir « éliminer y » !

a. Comment devraient être les coefficients de y dans les deux équations pour « éliminer les termes en y » de la même façon qu'à la question précédente ?

b. Que peut-on faire à chacune des équations pour y parvenir ?

c. Transformer les équations pour obtenir une équation du premier degré d'inconnue x en procédant de la même façon qu'à la question 2.

d. Résoudre cette équation.

e. Tester le couple trouvé et conclure.

4. Comparer la méthode utilisée dans la question 1.et celle mise en œuvre dans les questions 2. et 3.

5. Vocabulaire: cette méthode de résolution s'appelle la **méthode par addition**.

Activité 4 Un peu extrême

1. D'une extrémité...

a. On considère le système d'équations suivant : $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ -35x + 7y = -7 \end{cases}$.

b. Placer dans un même repère des représentations graphiques des deux équations. Que remarque-t-on?

c. Déduire des questions **a.** et **b.** le nombre de solutions que semble avoir le système.

d. Le démontrer.

2. ... à l'autre

a. Reprendre les questions **a.** et **b.** de la partie **1.** avec le système $\begin{cases} -12x + 3y = 15 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$.

b. Que penser du nombre de solutions de ce système ?

c. Le démontrer.

3. Au final

Que peut-on dire du nombre de solutions que peut admettre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ?

Activité 5 Problème

1. Salomé propose une petite énigme à sa petite sœur :

> Dans un élevage de poules et de lapins, j'ai compté 2 171 têtes et 4 368 pattes.
>
> Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ?

a. Combien ce problème possède-t-il d'inconnues ?

b. Traduire ce problème par un système d'équations du premier degré.

c. Résoudre le système par la méthode de votre choix.

d. Vérifier que le couple trouvé est bien la solution du problème posé et conclure.

e. Est-il possible d'avoir compté dans cette basse-cour 2 171 têtes et 5 367 pattes ? Justifier.

f. Et 2 171 têtes et 2 368 pattes, c'est possible ? Justifier.

g. Et 2 171 têtes et 8 684 pattes ? Justifier.

Activité 6 Des systèmes plus complexe ?

Résoudre le système suivant de trois équations et trois inconnues : $\begin{cases} x + y = 59 \\ x + z = 75 \\ y + z = 32 \end{cases}$.

Activité 7 Un type de systèmes

1. Résoudre les systèmes suivants:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 6y = 2 \\ 3y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ x - y = -1 \\ 3x = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -4 \\ 3y + z = 0 \\ 2y = -2 \end{cases}$

2. Décrire les systèmes ci-dessus et expliquer en quoi leur résolution est simple.

3. Vocabulaire: on appelle ces systèmes des **systèmes triangulés**.

A savoir 1 Définitions

On appelle un système d'équations un ensemble d'équations qui doivent être résolues en même temps. Les équations composant le système peuvent comporter plusieurs inconnues.
Un système d'équations linéaires est un système dont toutes les équations qui le composent sont du premier degré.

Exemple: $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 14 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à trois inconnues.

Une solution d'un système est un objet qui dépend du nombre d'inconnues du système. Si le système a deux inconnues, c'est un **couple** noté $\langle x;y\rangle$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ qui vérifie toutes les équations simultanément, si le système a trois inconnues, c'est un **triplet** noté $\langle x;y;z\rangle$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$ qui vérifie toutes les équations simultanément , etc.

Exemple: le triplet $\langle 1;3;1\rangle$ est solution du système $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 14 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ car $3\cdot 1+2\cdot 3+5\cdot 1=14$ et que $1-2\cdot 3+2\cdot 1=-3$, mais ce n'est pas la seule, par exemple, $\langle 43;0;-23\rangle$ en est une autre.

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.
Un système est dit **triangulé** si chaque équation de ce système possède une inconnue de moins que l'équation précédente et que la dernière équation n'a qu'une seule inconnue.

Exemples:

- $\begin{cases} 5x + 6y - 2z = 8 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ n'est pas un système triangulé car la dernière équation a deux inconnues.
- $\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 56 \\ -x + 8y = -3 \\ 5x = 15 \end{cases}$ est un système triangulé.

Remarque: nous traiterons principalement de systèmes d'équations linéaires, c'est à dire que les équations qui composent les systèmes sont du premier degré.

A savoir 2 Résoudre un système triangulé

Exemple: résoudre le système $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 4x = 12 \end{cases}$.

Déterminer une des inconnues

On commence par résoudre la dernière équation qui, par définition, ne contient qu'une seule inconnue.

$$\begin{cases} x+3y=-3 \\ \mathbf{4x=12} \end{cases}$$ ← On divise les deux membres de l'équation par 4 pour obtenir $\mathbf{x=3}$

Déterminer la deuxième inconnue

$$\begin{cases} \mathbf{3}+3y=-3 \\ x=3 \end{cases}$$ ← On utilise le résultat dans la première équation.

$$\begin{cases} 3y=-3-\mathbf{3} \\ x=3 \end{cases}$$ ← On réduit l'équation ainsi obtenue.

$$\begin{cases} \mathbf{3y=-6} \\ x=3 \end{cases}$$ ← On résout la première équation qui, à présent, ne contient plus qu'une seule inconnue. $\mathbf{y=-2}$.

Conclusion

Ce système $\begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$ a une unique solution qui est $S=\{\langle 3;-2;-4\rangle\}$.

A savoir 3 Trianguler un système

En multipliant les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, on obtient une équation équivalente.

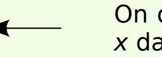
En additionnant à une équation d'un système une autre équation du même système, on obtient un système équivalent.

Remarque: on additionne les équations « membre par membre ».

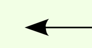
Exemple: trianguler le système $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ -x+3y=3 \end{cases}$

On cherche à éliminer une inconnue (*y* par exemple) de la seconde équation.

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ \mathbf{3\cdot(-x+3y)}=3\cdot\mathbf{3} \end{cases}$$ ← On multiplie les deux membres de la seconde équation par **3**.

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ -3x+9y=9 \end{cases}$$  On obtient ainsi des coefficients opposés devant *x* dans les deux équations.

$$2y+9y=8+9$$
$$11y=17$$
← On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer *x*. On obtient une nouvelle équation que l'on peut utiliser pour avoir un système équivalent.

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 11y=17 \end{cases}$$  Le nouveau système obtenu est triangulé.

A savoir 4 Résoudre un système par substitution

Exemple: résoudre le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y = 9 + 3x$	⟵	On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.
$4x - 3(\mathbf{9 + 3x}) = -17$	⟵	On remplace (substitue) y par **9 + 3x** dans la deuxième équation.
$4x - 27 - 9x = -17$ $-5x = 10$ $x = -2$	⟵	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.
$y = 9 + 3 \times (\mathbf{-2})$ $y = 9 - 6$ $y = 3$	⟵	On remplace x par **− 2** dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

On vérifie ensuite que le couple $\langle -2\ ;3\rangle$ est une solution effective de ce système.

A savoir 5 Résoudre un système par addition

Exemple: résoudre le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par addition.

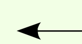
Déterminer une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{5} \times (5x - 4y) = \mathbf{5} \times 8 \\ \mathbf{4} \times (2x + 5y) = \mathbf{4} \times 1 \end{cases}$	⟵	On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.
$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$	⟵	On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.
$25x + 8x = 40 + 4$	⟵	On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y
$33x = 44$ et donc $x = \frac{4}{3}$	⟵	On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

Déterminer l'autre inconnue

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} \mathbf{2} \times (5x - 4y) = \mathbf{2} \times 8 \\ \mathbf{5} \times (2x + 5y) = \mathbf{5} \times 1 \end{cases}$		On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la seconde par **5**.

$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$	⟵	On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.
$-8y - 25y = 16 - 5$	⟵	On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x.
$-33y = 11$ et donc $y = -\frac{1}{3}$	⟵	On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système.

A savoir 6 Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple **:** Un musée propose un tarif pour les adultes à 7.- et un autre pour les enfants à 4,50.-. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50.-. Retrouver le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1: choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.	⟵	**On repère les inconnues.** On les note généralement x et y.
205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$. La recette totale a été de 1 222,50.- donc $7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50$.	⟵	**On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y.

Étape n°2: mettre le problème en équation

Ainsi $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}5y = 1222{,}50 \end{cases}$.	⟵	L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3: Résoudre le système

Étape n°4: Vérifier que le couple $(120 ; 85)$ trouvé est solution du problème

Étape n°5: Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

Mise en route

1 Le couple $\left(3;\frac{3}{2}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases}7x+12y = 3\\ -5x+8y = 31\end{cases}$?

2 Donner un système de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est S={(-2 ; 3)}.

3 Jacques a trouvé trois couples solutions pour les équations ci-dessous : (3 ; 4) ; (1 ; 1) et $(-2;4)$. Déterminer de quelle(s) équation(s) chaque couple est solution.

- $3x - 2y = 1$
- $3x + y = -2$
- $5x - 7y = -2$

b. Peut-on en déduire un couple de solutions pour chacun des systèmes suivants ?

- $\begin{cases}3x - 2y = 1\\ 5x - 7y = -2\end{cases}$
- $\begin{cases}3x - 2y = 1\\ 3x + y = -2\end{cases}$

4 Combien de couples sont solutions des systèmes suivants ?

a. $\begin{cases}x + y = 1\\ x + y = 1\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x + y = 1\\ 5x + 5y = 5\end{cases}$

b. $\begin{cases}x + y = 1\\ x + y = 5\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}x + y = 1\\ 3x + 3y = 5\end{cases}$

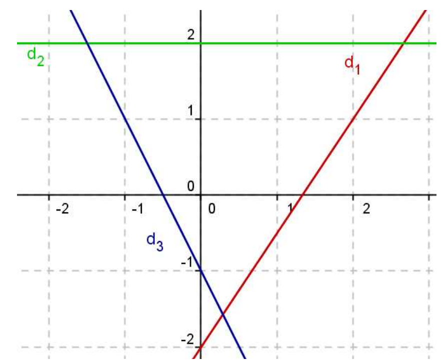
5 Tracer les droites correspondant aux couples d'équations suivantes et déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection.

a. $\begin{cases}y = 3x-1\\ y = 2x - 3\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x - 3y = 2\\ 2x - 7y = 6\end{cases}$

b. $\begin{cases}x - 3y = 2\\ 2x - 6y = 4\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}x - 3y = 2\\ 2x - 7y = 6\end{cases}$

Résolutions algébriques

6 On considère les trois droites suivantes.



a. Déterminer par lecture du graphiques les points d'intersection.

b. Déterminer les équations correspondant à chacune de ces droites.

c. Poser les systèmes d'équations permettant de déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection.

d. Calculer les valeurs exactes de ces points.

7 Résoudre les systèmes suivants dans un premier temps avec la méthode par substitution et dans un deuxième temps avec la méthode par addition.

$\begin{cases}2x - 5y = -14\\ 4x - 3y = 7\end{cases}$ $\begin{cases}x + 3y = -7\\ 2x + 5y = -3\end{cases}$

a. Compter le nombre d'étapes nécessaires pour chaque résolution.

b. Formuler un critère qui permette de choisir judicieusement la méthode à utiliser en fonction de la forme du système à résoudre.

8 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par triangulation:

a. $\begin{cases}3x - 2y = -18\\ 9x + 10y = -6\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}3x + y = 12\\ 5x - y = 4\end{cases}$

b. $\begin{cases}5x + 4y = 11\\ 15x + 2y = -7\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}2x + y = 21\\ 4x - 3y = -13\end{cases}$

9 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution:

a. $\begin{cases}2x - 3y = -2\\ 2x + 15y = 7\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}5x + 3y = 8\\ 2x - 4y = -2\end{cases}$

b. $\begin{cases}2x - 6y = -8\\ 3x + 2y = 21\end{cases}$

10 Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par addition.

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 4 \end{cases}$

11 Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix.

a. $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 7x + 10y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ 3x - 7y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 10x + 3y = -7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x - 7y = 31 \end{cases}$

Problèmes

12 Poser le système qui permet de résoudre les problèmes suivants et les résoudre.

a. Soient deux nombres. Si on ajoute au premier nombre 3 fois le second, on obtient 90. Mais si on ajoute au second nombre 3 fois le premier, on trouve 70. Quels sont ces nombres ?

b. a division euclidienne de deux nombres entiers naturels donne un quotient égal à 7 et un reste égal à 2. La somme de ces deux nombres entiers est égale à 138. Déterminer ces deux nombres entiers.

c. Dans ma tirelire, j'ai des pièces de 2CHF et des pièces de 5CHF, soit 15 pièces en tout. Combien ai-je de pièces de chaque sorte, sachant que j'ai 54CHF ?

d. J'ai dans mon porte-monnaie des pièces de 2CHF et des pièces de 1CHF, soit 21 pièces en tout. Si les pièces de 2CHF étaient remplacées par des pièces de 1CHF. et inversement, j'aurais 3CHF de moins. Combien ai-je ?

e. Il y a 6 ans, Jean avait 4 fois l'âge de Marie. Dans 4 ans, Jean aura 2 fois l'âge de Marie. Quel âge ont-ils maintenant ?

f. Un confiseur prépare deux sortes de boîtes comprenant des petits macarons et des grands. Dans la première boîte, il place dix petits macarons et quatre grands : cette boîte est vendue 7,20 €. Dans la seconde boîte, il place cinq petits macarons et six grands : cette boîte est vendue 7,80 €. Calculer le prix en euros de chaque sorte de macarons.

g. Maria veut réduire sa consommation d'eau. Elle a calculé qu'avec 1 m^3 d'eau elle pouvait prendre un bain et 17 douches ou bien 4 bains et 8 douches. Déterminer les volumes d'eau utilisés pour un bain et pour une douche.

h. Une agence de location de voitures fait payer la location en fonction du nombre de jours de location et du nombre de kilomètres parcourus. Simon a loué une voiture pendant trois jours et a parcouru 650 km ; il a payé 145,50 €. Aliksan a loué une voiture pendant quatre jours et a parcouru 580 km ; il a payé 151 €. Combien paiera un client qui doit faire 600 km sur trois jours ?

i. Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement, des albums ou des boîtes. Léa achète six boîtes et cinq albums et paie 57 €. Hugo achète trois boîtes et sept albums et paie 55,50 €. Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?

j. Alexandra a pour l'instant deux notes en géographie. Une épreuve qui compte triple et une récitation qui compte une fois. Elle a une moyenne provisoire de 4,75. Elle préfèrerait que la récitation compte triple et l'épreuve une seule fois, car cela lui ferait une moyenne de 5,25. Quelle est sa note d'épreuve ?

k. Trois élèves achètent 45 petits pains au chocolat pour les revendre à la récréation. Ils les payent 2,20CHF pièce et les revendent en principe 4CHF. La fin de la récréation approche et il leur reste encore des petits pains, alors ils décident de les vendre 3CHF. Finalement, ils font un bénéfice de 69CHF. Combien ont-ils vendu de petits pains à 4CHF ?

l. On cherche l'équation d'une droite passant par les points $A(-2;3)$ et $B(58;33)$. Si les deux inconnues sont la pente et l'ordonnée à l'origine, poser le système qui permet de déterminer l'équation de cette droite et résolvez-le.

Exercices supplémentaires

13 Résoudre les systèmes suivants par substitution.

a. $\begin{cases} -2x+3y = 2 \\ x-2y = 8 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 5x-6y = 4 \\ 3x+7y = 8 \end{cases}$

14 Résoudre les systèmes suivants par addition.

a. $\begin{cases} 2x+5y = 16 \\ 3x-7y = 24 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x+4y = 3 \\ x-2y = -4 \end{cases}$

15 Résoudre les systèmes suivants par triangulation.

a. $\begin{cases} 7x+12y = 3 \\ -5x+8y = 31 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x+y = 16 \\ 13x-11y = 16 \end{cases}$

16 Soient deux nombres. Si on ajoute au premier les $\frac{3}{4}$ du second, on obtient 14. Mais si on retranche au triple du second les $\frac{3}{10}$ du premier, on obtient la fraction $\frac{69}{2}$. Quels sont ces deux nombres ?

17 Alexia dit à Christel : « Dans 5 ans, j'aurai 5 fois le quart de ton âge actuel. » Et Christel de lui répondre : « Tiens, tu n'as que 5 ans de plus que moi ! » Calculer l'âge des deux amies.

18 À la boulangerie, Matteo achète deux parts de pizza et quatre parts de flan pâtissier. Il paie 12.-. Salim achète trois parts de pizza et deux parts de flans pâtissiers. Il paie 9,80.-. Quel est le prix d'une part de pizza ? Quel est le prix d'une part de flan pâtissier ?

19 Perrine a 100.-. Elle souhaite acheter des disques et des livres. Si elle achète quatre disques et cinq livres, il lui manque 9,50.-. Si elle achète trois disques et quatre livres, il lui reste 16.-. Calculer le prix d'un disque et celui d'un livre.

20 Mehdi et Martial ont acheté des stylos plume et des cartouches à la papeterie. Mehdi paie 15.- pour deux stylos et cinq lots de cartouches. Martial paie 10,20.- pour un stylo et quatre lots de cartouches.

a. Quel est le prix d'un stylo ? Et celui d'un lot de cartouches ?

b. Une semaine plus tard, la papeterie solde : − 10 % sur les stylos et − 15 % sur les lots de cartouches. Quels prix Mehdi et Martial auraient-ils payés s'ils avaient patienté ?

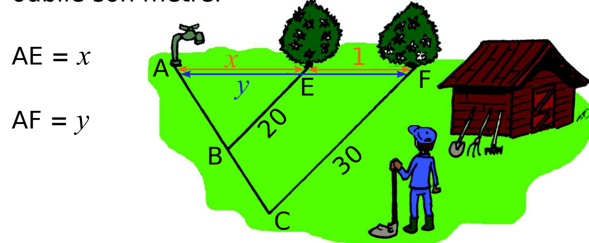
21 Parmi les 1 500 élèves que compte un collège, 455 d'entre eux vont visiter le château de Versailles. Ce groupe de 455 élèves représente 28 % des filles et 32 % des garçons du collège. Combien y a-t-il de filles et de garçons dans ce collège ?

22 Thalès à la rescousse

Afin d'éviter les pertes d'eau, la mairie de Résousys souhaite installer un système d'arrosage automatique enterré dans un jardin municipal triangulaire schématisé ci-dessous par le triangle ACF. Le long de [BE] et [CF] vont être plantées deux rangées parallèles de seringa, espacées de 1 m. Le jardinier municipal a donc enterré 20 m puis 30 m de tuyaux poreux. Mais il s'est retrouvé à court de tuyau et doit encore relier E et F à A où se trouve l'arrivée d'eau. Grand étourdi, il a aussi oublié son mètre.

AE = x

AF = y



Les points A, E et F sont alignés ainsi que les points A, B et C.
Aide-le à déterminer les longueurs AE et AF, afin qu'il puisse revenir avec la quantité de tuyaux nécessaire.

Réponses des exercices supplémentaires

13 $\langle 4;-2 \rangle$ / $\langle \frac{76}{53};\frac{28}{53} \rangle$

14 $\langle 8;0 \rangle$ / $\langle -1;\frac{3}{2} \rangle$

15 $\langle 1;2 \rangle$ / $\langle 4;-9 \rangle$

16

17

18 1.-90 et 2.-05

19 18.- et 7.-50

20 3.- et 1.-80 / 13.-05 et 8.-82

21 625 filles et 875 garçons

22 AE = 2m et AF = 3m

Exercices d'approfondissement

1 Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix.

a. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{3-y}{5} = 2{,}3 \\ x+7 + \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{7{,}5}{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2y-21}{2} + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} + 3 = \dfrac{3-y}{5} - \dfrac{10}{3} \end{cases}$

2 Résoudre par triangulation les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} 2x - y = 14 \\ 5x + y - z = 9 \\ 7x - 5y - 6z = 118 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 6y + z = -20 \\ 3x + y - 4z = -11 \\ x + 6y - 3z = 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 3y = 60 \\ 5y 17z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = 17 \end{cases}$

3 Farid dit à Yasmina : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. ». Yasmina dit à Farid : « Quand j'aurai ton âge, nous aurons 42 ans à nous deux. ». Détermine l'âge de Farid et l'âge de Yasmina.

4 Il est recommandé de consommer 110 mg de vitamine C par jour. La maman de Julien achète du jus d'orange qui contient 52 mg de vitamine C pour 100 mL et du jus de pomme qui en contient 12 mg pour 100 mL. Pour suivre les recommandations tout en variant sa consommation de fruits, Julien souhaite boire un peu des deux dans un verre de 250 mL le matin au petit déjeuner. Quelle quantité de chaque jus devra-t-il mélanger pour bénéficier de son apport quotidien en vitamine C avec ce seul verre ?

5 Leïla dispose de deux tablettes de chocolat. L'une contient 60 % de cacao et l'autre 92 % de cacao. Quelle masse de chaque tablette doit-elle mélanger pour obtenir un mélange de 400 g dont la teneur en cacao est de 72 % ?

d. On cherche l'équation d'une parabole passant par les points $A(-2;3)$, $B(0;1)$ et $C(3;3)$. Si les trois inconnues sont les coefficients a b et c de l'équation d'une parabole, poser le système de trois équations à trois inconnues qui permet de déterminer l'équation de cette parabole et résolvez-le.

Présentée sous forme mathématique, l'erreur acquiert un grand prestige

Gustave Le Bon (1841-1931)

Savoir définir/expliquer/justifier/illustrer

- ✔ Connaître le vocabulaire relatif aux équations : être solution, ensemble de solutions, équations équivalentes.
- ✔ Savoir définir un système d'équations avec l'idée de simultanéité.
- ✔ Connaître la forme de la solution cherchée : couple, triplet,etc.
- ✔ Savoir reconnaître les situations particulières, sans solutions ou avec une infinité de solutions.
- ✔ Vocabulaire particulier : équations linéaires, système triangulé.
- ✔ Comprendre la représentation graphique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
- ✔ Pouvoir expliquer les différentes méthodes de résolution algébrique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues (substitution, addition, triangulation).
- ✔ Connaître les différentes étapes de la résolution d'un problème à l'aide des systèmes d'équations linéaires.

Savoirs-faire

- ✔ Être capable de tester si un couple (un triplet) proposé est solution d'un système donné.
- ✔ Pouvoir représenter graphiquement un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
- ✔ Pouvoir résoudre algébriquement tout système de deux équations linéaires à deux inconnues.
- ✔ Pouvoir résoudre par substitution, par addition et par triangulation tout système de deux équations linéaires à deux inconnues.
- ✔ Être capable de résoudre algébriquement un système de trois équations linéaires à trois inconnues.
- ✔ Pouvoir reconnaître les inconnues dans un problème et le mettre en équation à l'aide d'un système d'équations.